



**T.C. İSTANBUL T CARET
ÜNİVERSİTESİ**

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RIEMANN MANIFOLDU ÜZERİNDE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLER**

Sümeyye BAKIM

**Danışman
Prof. Dr. İsmail KÖMBE**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL - 2021**

KABUL VE ONAY SAYFASI

Sümeyye BAKIM tarafından hazırlanan “**Riemann Manifoldu Üzerinde Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler**” adlı tez çalışması 05/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri önünde başarı ile savunularak, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı** ’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman	Prof. Dr. İsmail KÖMBE İstanbul Ticaret Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YENER İstanbul Ticaret Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ömer AKIN TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. İbrahim KIRAT İstanbul Teknik Üniversitesi	
Jüri Üyesi	Prof. Dr. Ahmet DURAN İstanbul Teknik Üniversitesi	

Onay Tarihi : 09/08/2021

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünün 09/08/2021 tarih ve 2021/318 numaralı Yönetim Kurulu Kararının 9. maddesi gereğince, ders yüklerini ve tez yükümlülüğünü yerine getirdiği belirlenen ”Sümeyye BAKIM” adlı öğrencinin mezun olmasına oy birliği ile karar verilmiştir.

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK
Enstitü Müdürü

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

09/08/2021

Sümeyye BAKIM

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	5
3. ÖN BİLGİLER	10
3.1. Fonksiyon Uzayları	10
3.2. Riemann Manifoldu	12
3.2.1. Diferansiyellenebilir manifoldlar	12
3.2.2. Riemann manifoldunda analiz	15
3.3. Eşitsizlikler	20
3.3.1. Sobolev tipi eşitsizlikler	22
4. HİPERBOLİK UZAY	24
5. HIZLI YAYINIM TİPİ DENKLEM ve UYGULAMALARI.....	29
5.1. Hızlı Yayınım Tipi Denklem.....	29
5.2. Teorem 5.1'in Uygulamaları.....	33
6. p -LAPLASYAN TİPİ DENKLEM ve UYGULAMALARI	42
6.1. p -Laplasyan Tipi Denklem.....	42
6.2. Teorem 6.1'in Uygulamaları.....	47
7. GELİŞTİRİLMİŞ HARDY VE LERAY TİPİ EŞİTSİZLİKLER	56
7.1. Teorem 7.1, Teorem 7.2 ve Teorem 7.3'ün Uygulamaları	65
8. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	70
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ	76

ÖZET

Doktora Tezi

RIEMANN MANIFOLDU ÜZERİNDE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Sümeyye BAKIM

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İsmail KÖMBE
2021, 76 sayfa

Bu tez çalışmasının iki temel amacı bulunmaktadır. İlk olarak aşağıda verilen doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin pozitif çözümlerinin yokluğu incelenmiştir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g(u^m) + V(x)u^m + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{p,g}u + V(x)u^{p-1} + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

Burada, $0 < m < 1$, $1 < p < 2$, $V \in L^1_{loc}$, $q > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve Ω bölgesi, kompakt olmayan M Riemann manifoldunda düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölgedir. Δ_g ve $\Delta_{p,g}$, sırasıyla M üzerinde Laplasyan ve p -Laplasyan operatörleridir.

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde Hardy tipi eşitsizliklerin önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Bu bağlamda, tezin ikinci amacı olarak, M Riemann manifoldu üzerinde ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlikler ispatlanmıştır. Uygun ağırlık fonksiyon seçimleri ile hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ içindeki düzgün sınırlı Ω bölgelerinde çeşitli kalan terimli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca, pozitif çözümlerin yokluğu ispatlanırken kullanılan Leray potansiyeli de bu yolla elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hardy-Leray tipi eşitsizlikler, Hızlı Difüzyon Denklemi, Kritik kuvvet, p -Laplasyan Denklemi, Pozitif çözümlerin yokluğu.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Sümeyye BAKIM

Istanbul Commerce University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İsmail KÖMBE
2021, 76 pages

The main goal of this thesis is twofold. First, we investigate nonexistence of positive solutions of the following nonlinear partial differential equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g(u^m) + V(x)u^m + \lambda u^q & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{p,g}u + V(x)u^{p-1} + \lambda u^q & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ u(x, t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

where $0 < m < 1$, $1 < p < 2$, $V \in L^1_{loc}$, $q > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ and Ω is a bounded domain with smooth boundary in a noncompact Riemannian manifold M . Δ_g and $\Delta_{p,g}$ represents Laplacian and p -Laplacian operator on M respectively.

Importance of Hardy type inequalities in the analysis of the solutions of partial differential equations is well known. From this point of view, as a second goal, weighted L^p Hardy type inequalities are proved on a Riemannian manifold M . Various improved inequalities are obtained on smooth bounded domains Ω in the hyperbolic space $\mathbb{H}^n$ with appropriate selection of weight functions. Furthermore, the Leray potential that used in proving the absence of positive solutions, was also obtained in this way.

Keywords: Critical Exponent, Fast Diffusion Equation, Hardy-Leray type inequalities, Nonexistence of positive solutions, p -Laplacian Equation.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, dinamizmi, vizyonu, samimiyeti ve motivasyonu ile örnek olan, her zaman öğrencisi olmaktan ve kendisiyle çalışmaktan gurur duyduğum danışman hocam sayın Prof. Dr. İsmail KÖMBE'ye, sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Kısmi diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalarıyla uluslararası camia tarafından tanınan, üzerinde çalıştığım problemlerle ilgili zaman zaman soru sorduğum ve fikirlerinden istifade ettiğim, öngörülerini bana ışık tutan sayın Prof. Gisèle Ruiz GOLDSTEIN ve Prof. Jerome Arthur GOLDSTEIN'a çok teşekkür ederim.

Jüri üyelerim sayın Prof. Dr. Ömer AKIN, Prof. Dr. İbrahim KIRAT, Prof. Dr. Ahmet DURAN ve Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YENER'e tez savunma komitemde olmayı kabul ettikleri, değerli vakitlerini ayırdıkları, faydalı yorumlar ve tartışmalar sağladıkları için teşekkürlerimi sunarım.

Akademik hayata adım attığımda tanıştığım ilk kişi olduğu için kendimi çok şanslı hissettiğim, bana olan inancını ve desteğini hiçbir zaman esirmeyen, bilim insanı kişiliği ve açık fikirliliğiyle bana rehberlik eden sayın Prof. Dr. Ayben KARASU UYSAL'a minnetimi bir borç bilirim.

Çalışmalarımdaya ilerleyemediğimi hissettiğim zamanlarda bana ilham veren, beni hiç yalnız bırakmayan, moral ve motivasyon sağlayan kıymetli ofis arkadaşım, yoldaşım Dr. Öğretim Üyesi Nurten URLU ÖZALAN'a çok teşekkür ederim.

Son olarak, hayatım boyunca aldığım bütün kararlarda beni destekleyen, her zaman yanımda olan, en iyi şartlarda yetişmem için fedakarlıklar yapan annem Saliha ŞENER'e ve babam Prof. Dr. Sami ŞENER'e, sonsuz teşekkür ederim. Doktora sürecimde her daim sabır gösteren ve şikayet etmeden zorluklarla mücadele etmeme yardımcı olan, ben kendime inanmadığımda bile bana inanan sevgili eşim Yasin BAKIM'a, ders çalışmama izin verdiği için sevgili kızım Ayşe Sare'ye teşekkürlerimi kelimelerle ifade etmem mümkün değil. Biricik kızım, bu çalışmayı sana ithaf ediyorum.

Sümeyye BAKIM
İstanbul, 2021

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu Öklid uzayı
$C(\Omega)$	Ω bölgesindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_0^k(\Omega)$	Ω bölgesinde k . mertebeden sürekli türevlenebilir kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	Test fonksiyonları uzayı
∇	Öklid uzayında tanımlı gradyan vektörü
Δ	Öklid uzayında tanımlı Laplace operatörü
∇_g	Riemann manifoldu üzerinde tanımlı gradyan vektörü
Δ_g	Riemann manifoldu üzerinde tanımlı Laplace operatörü
$\Delta_{p,g}$	Riemann manifoldu üzerinde tanımlı p –Laplace operatörü
$B(x_0, R)$	Öklid uzayındaki x_0 merkezli, R yarıçaplı açık yuvar
w_n	n – boyutlu $B(0, 1)$ birim yuvarının yüzey alanı
$L^p(\Omega)$	Ω bölgesindeki p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$L_{loc}^p(\Omega)$	Ω bölgesindeki p –yerel integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$W^{k,p}$	Sobolev uzayı
$W_0^{k,p}$	C_0^∞ uzayının $W^{k,p}$ uzayındaki kapanışı
$\mathbb{H}^n$	Hiperbolik uzay
$\nabla_{\mathbb{H}^n}$	Hiperbolik gradyan vektörü
$\Delta_{\mathbb{H}^n}$	Hiperbolik Laplace operatörü
$\Delta_{p,\mathbb{H}^n}$	Hiperbolik p –Laplace operatörü
$\mathbb{S}^{n-1}$	$\mathbb{R}^n$ uzayında birim yuvar
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$\bar{\Omega}$	Ω bölgesinin kapanışı: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$ \Omega $	Ω bölgesinin Lebesgue ölçüsü
Büyük- O notasyonu	$x \rightarrow x_0$ limiti alındığında x_0 noktasına yeterince yakın her x değeri için $ f(x) \leq C g(x) $ olacak şekilde bir C sabiti varsa, $f = O(g)$ yazılır.
Küçük- o notasyonu	$x \rightarrow x_0$ limiti alındığında, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ f(x) }{ g(x) } = 0$ oluyorsa, $f = o(g)$ yazılır.

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler, fizik ve mühendislik gibi bir çok bilim dalında uygulaması olması nedeniyle, matematiğin en aktif çalışma alanlarından biridir. Bu alanlardaki problemler, doğrusal veya doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ile modellenebilmektedir.

Bir kısmi diferansiyel denklemin, hem $x = (x_1, \dots, x_n)$ uzayı hem de t zamanını içeren formu evolüsyon denklemi olarak adlandırılır. Evolüsyon denklemlerinin en basit iki örneği ısı denklemi ve dalga denklemidir. Doğrusal olmayan evolüsyon denklemleri, ısı transferi ve kuantum mekaniğinde, doğrusal olmayan reaksiyon-difüzyon denklemi ve doğrusal olmayan Schrödinger denklemi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Doğrusal olmayan evolüsyon problemlerini doğrusal olanlardan ayıran en dikkat çekici özelliklerden biri, singülaritelerin (yani çözümün tekilliği) ortaya çıkmasıdır. Bu problemlerdeki tekilliklerin en basit biçimi, zaman belirli sonlu bir $T > 0$ limitine yaklaştığında değişken veya değişkenler sonsuza yaklaşma eğilimi gösterdiğinde ortaya çıkmaktadır. Yani çözüm, sonlu zamanda sonsuz olur. Buna *çözümün patlaması* (*blow up*) denir. Patlama kavramı, evrim sürecini tanımlayan değişkenlerin sonsuz büyümesi nedeniyle zaman içinde çözümlerin global olarak varlığını durdurduğu anlamına gelmektedir. Bir $\Omega \times [0, T)$ bölgesi üzerinde $T < +\infty$ için bir çözüm varsa, bu çözüme *lokal* (yerel) *çözüm* denir. Bu durum çözümlerin yerel varlığı olarak adlandırılır. Çözümlerin var olduğu tüm bu T 'lerin supremumu $T_{\max}$, çözümlerin varlığının en geniş zamanıdır ve $T_{\max} = \infty$ olduğunda çözüm *global çözümdür*. $T_{\max} < +\infty$ durumunda ise, çözümler global olmaz, sonlu zamanda çözümlerin patlaması gerçekleşir.

Doğrusal olmayan, parabolik tipteki difüzyon denklemlerinin en genel hali

$$u_t = \Delta u^m, \quad u \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

şeklindedir. Bu denklemden, $\Delta u^m = \operatorname{div}(\nabla u^m) = \operatorname{div}(mu^{m-1}\nabla u)$ olduğundan, difüzyon $D(u) := mu^{m-1}$ tarafından yürütülür. Yani,

- (i) $m = 1$ ise, difüzyon $D(u) = 1$ iken sabittir ve denklem doğrusal ısı denklemidir.
- (ii) $m > 1$ ise, $u \rightarrow 0$ iken difüzyon $D(u) = mu^{m-1} \rightarrow 0$ olduğundan denklem, gözenekli ortam denklemidir (yavaş difüzyon).

(iii) $0 < m < 1$ ise, $u \rightarrow 0$ iken difüzyon $D(u) = mu^{m-1} \rightarrow \infty$ olduğundan denklem hızlı difüzyon denklemidir.

(iv) $m < 0$ ise, denklem süper hızlı difüzyon denklemidir.

Gözenekli ortam denklemi (Porous Medium Equation), parabolik tipteki doğrusal olmayan evolüsyon denklemlerinin en basit örneklerinden biridir. Bu denklemin, sıvı akışı, ısı transferi veya difüzyon gibi fiziksel uygulamaları bulunmaktadır. Hızlı yayılım denklemi (Fast Diffusion Equation) ise, plazma fiziği, geometrik akışlar (yüzeylerdeki Ricci akışı ve Yamabe akışı) gibi uygulamalarda karşımıza çıkmaktadır.

Bir başka önemli doğrusal olmayan parabolik tipteki denklem ise,

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < n \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanan p -Laplace denklemidir. Bu denklemde $p = 2$ alındığında bilinen Laplace denklemi elde edilir. $p > 2$ olduğunda dejenere difüzyon denklemi ve $p < 2$ durumunda ise singüler difüzyon denklemi olarak adlandırılır.

(1.1) ve (1.2) denkleminin önemli bir genişlemesi de, denklemlerin sağ tarafına bir terim eklenmesi ile oluşmaktadır:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u^m + F(x, t), \\ u_t &= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + F(x, t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

(1.3) tipindeki denklemlerin çözümlerinin davranışları bir çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve bu denklemlerin pozitif çözümlerinin yokluğunun nelere bağlı olduğu sorusu irdelenmiştir. Bu araştırmalarda (1.3) denkleminde $F(x, t)$ terimi bir $V(x)$ potansiyeli veya u^p kaynak terimi olarak ele alınmış ve çözümlerin davranışları incelenmiştir.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların ışığında, Riemann manifoldu üzerinde hem potansiyel hem de kaynak terim içeren daha genel bir problemin pozitif çözümlerinin yokluğunun nelere bağlı olduğu sorusu akla gelmektedir.

Bu tezin ilk amacı, doğrusal olmayan hızlı difüzyon tipi ($0 < m < 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g(u^m) + V(x)u^m + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.4)$$

denklemini ile, doğrusal olmayan p -Laplasyan tipi ($1 < p < 2$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{p,g}u + V(x)u^{p-1} + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.5)$$

denklemlerinin kompakt olmayan bir M Riemann manifoldu üzerinde pozitif çözümlerinin yokluğunu incelemektir. Burada u çözümü yoğunluk, derişim, sıcaklık veya yükseklik gibi fiziksel bir nicelik olabileceğinden yalnızca pozitif çözümlerle ilgilenilmektedir.

Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin pozitif çözümünün yokluğunu etkileyen en önemli faktörlerden biri $V(x)$ potansiyelinin seçimidir. Bu ise, çözümün yokluğunu göstermede kullanılabilecek yeni Hardy potansiyelleri bulma fikrini ortaya koymaktadır. Bu bağlamda, bu tez çalışmasının diğer bir amacı da (1.4) ve (1.5) problemlerinin pozitif çözümlerinin yokluğunun incelenmesinde yeni potansiyeller elde etmek adına Riemann manifoldu üzerinde yeni Hardy tipi eşitsizlikler elde etmektir.

Tez yedi bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünün ardından Literatür Özeti bölümünde ele alınan konu ve denklemler ile ilgili yapılmış olan çalışmalar özetlenmiştir.

Ön Bilgiler olarak adlandırılan üçüncü bölümde, tezde kullanılan temel tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, model manifold olarak seçilen hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ in temel özellikleri tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde (1.4) hızlı yayılım tipi denklemin ve altıncı bölümde (1.5) p -Laplace tipi denklemin Riemann manifoldu üzerinde pozitif çözümünün yokluğu analiz edilmiştir. Seçilen somut potansiyeller kullanılarak hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ üzerinde, problemlerin pozitif çözümlerinin yokluğuna sebep olan faktörler belirlenmiştir.

Tezin yedinci bölümünde, geliştirilmiş (kalan terimli) Hardy ve Leray tipi eşitsizlikler sunulmuş ve bu eşitsizliklerin, model manifold olarak seçilen $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayın Poincaré yuvar modelinde sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlardan bazıları beşinci ve altıncı bölümde ele alınan problemlerin uygulamaları için somut potansiyeller sağlamıştır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Bu bölümde doğrusal olmayan parabolik denklemlerin pozitif çözümlerinin yokluğunun incelenmesinde günümüze kadar yapılan bazı çalışmalara kısaca değineceğiz.

İlk olarak Fujita (1966), $p > 1$ için,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p & , \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde kaynak terim içeren reaksiyon-difüzyon denkleminin çözümlerinin patlamasını çalışmıştır. Burada, pozitif, sürekli ve sınırlı u_0 başlangıç koşulu için (2.1) probleminin çözümünün patlaması p değerine bağlıdır. $1 < p < 1 + 2/n$ olduğunda (2.1) probleminin global pozitif çözümü bulunmamaktadır. $p > 1 + 2/n$ olduğunda ise global pozitif çözüm vardır.

Daha sonra Hayakawa (1973) ve Weissler (1981), $p = 1 + 2/n$ durumunda da (2.1) probleminin global pozitif çözümün olmadığını ispatlamışlardır. Buradaki $1 + 2/n$ değeri *kritik Fujita üssü* olarak adlandırılmaktadır. Fujita'nın sonucunu geliştirmek ve genelleştirilmek için, u^p terimi yerine daha genel kaynak terimler veya $\partial_t - \Delta$ ısı operatörü yerine parabolik olmayan operatörler kullanılarak çeşitli denklemler çalışılmıştır. İlgili çalışmalar için (Levine, 1990; Deng ve Levine, 2000) referanslarına bakılabilir.

Potansiyele sahip bir ısı denklemini ele alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Bu denklem için, $V(x)$ potansiyeli, sıfırın herhangi komşuluğu civarının dışında sınırlı ve negatif olmayan ve $\lim_{x \rightarrow 0} V(x) = \infty$ olsun (Eğer $n = 1$ ise $\mathbb{R}$ yerine $(0, \infty)$ olur). Eğer $V(x) \rightarrow \infty$ yaklaşımı, $x \rightarrow 0$ yaklaşımı kadar yavaşsa, başlangıç değer problemi iyi tanımlıdır ve pozitif başlangıç koşulu, pozitif çözümlere yol açmaktadır. Bu noktada H. Brezis ve J.L.Lions şöyle bir soru sormuştur:

$V(x) \rightarrow \infty$ limiti, pozitif çözümlerin varlığına engel olacak kadar hızlı olabilir mi?

Bu soruya yanıt olarak, Baras ve Goldstein (1984), (2.2) denkleminde $V(x) = c/|x|^2$ potansiyelini ele almış ve $\Omega = \mathbb{R}^n$ veya $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x, t)$, $t \geq 0$ ve $x \in \Omega$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{c}{|x|^2} u & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.3)$$

Cauchy-Dirichlet probleminin çözümünün varlığını araştırmışlar ve çözümlerin kritik davranışlarını ortaya koymuşlardır. Bilinmektedir ki, (2.2) denklemi için, eğer $V(x)$ potansiyeli ”çok fazla singüler” ise pozitif çözüm bulunamamaktadır. Bu anlamda, Baras ve Goldstein (1984), $c > C^*(n) = (\frac{n-2}{2})^2$ ise $u \equiv 0$ dışında (2.3) probleminin pozitif çözümü olmadığını, $0 < c < C^*(n) = (\frac{n-2}{2})^2$ durumunda ise, pozitif çözümlerin bulunduğunu ispatlamıştır. Yani, $C^*(n) = (\frac{n-2}{2})^2$ değeri, $c/|x|^2$ ters kare potansiyeline sahip ısı denklemi için bir ayırım noktasıdır (*cut-off point*). Burada, $C^*(n) = (\frac{n-2}{2})^2$ değeri Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabittir:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi(x)|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi(x)|^2}{|x|^2} dx, \quad \phi \in C_0^1(\mathbb{R}^n).$$

Kuadratik form anlamında inceleyecek olursak, Hardy eşitsizliğine göre, $H = -\Delta - \frac{c}{|x|^2}$ simetrik operatörü $c \leq C^*(n)$ ise negatif değil, $c > C^*(n)$ ise negatiftir. Yani, H operatörünün sınırlılığının belirlenmesindeki kriter ile problemin pozitif çözümünün belirlenmesindeki kriter örtüşmektedir. Doğrusal Cauchy problemi için detaylı bilgiye (Goldstein, 1985) referansından ulaşılabilir.

Cabr  ve Martel (1999), Baras ve Goldstein (1984)’ın yapmış oldukları çalışmayı genel pozitif V potansiyeli için genişletmişlerdir. Problemin pozitif çözümünün varlığının ve yokluğunun $H = -\Delta - V$ simetrik operatörünün infimumunun büyüklüğü ile belirlendiğini ortaya koymuşlardır. Bu ise;

$$\sigma_{inf} = \sigma_{inf}(V, \Omega) = \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \int_{\Omega} V |\phi|^2 dx}{\int_{\Omega} |\phi|^2 dx} \quad (2.4)$$

ile ifade edilmektedir. Buna göre,

- (i) Eğer $\sigma_{inf}(V, \Omega) > -\infty$ ise global zayıf çözüm vardır.

- (ii) Eğer herhangi $\epsilon > 0$ için $\sigma_{inf}((1 - \epsilon)V, \Omega) = -\infty$ ise, $u \geq 0$ olacak şekilde problemin zayıf çözümü yoktur. Burada Ani Patlama (*instantaneous blow up*) vardır.

Cabr  ve Martel (1999)'in sonucu, çeşitli doğrusal parabolik denklemlerde (Goldstein ve Zhang (2001, 2003); Kombe (2004) ve Goldstein vd. (2005)), ve doğrusal olmayan problemlerde (Azorero ve Alonso (1998); Crespo ve Alonso (2000))   z m n yokluğunun ispatlanmasında kullanılmıştır. Kombe (2004) ise bu sonuçla çeşitli somut potansiyellerin çözüme etkisini incelemiştir.

Riemann manifoldu üzerinde yapılan çalışmalara örnek olarak, Zhang (1998, 1999, 2000) ve Zhang (2001) verilebilir. Bu  alı malarda Zhang, Fujita (1966)'nın sonuçlarını Riemann manifolduna geni letmekle kalmamış, bu sonuçları doğrusal olmayan başka parabolik denklem sınıflarına da ta ı mı tır. Örneğin, Zhang (1998) 'de n -boyutlu ($n \geq 3$) M Riemann manifoldu üzerinde, potansiyele ve kaynak terime sahip ($q > 1$), Fujita-tipi

$$\begin{cases} u_t = \Delta_g u - V(x)u + u^q & , \quad M \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad M, \end{cases} \quad (2.5)$$

denklemini ele almıştır. Bu çalışmada, potansiyele sahip ısı denkleminin temel çözümü için global sınırları kullanarak, fujita  ss  ve $V(x) = \frac{a}{(1+d(x)^b)}$ davranışına sahip potansiyelin ilişkisini incelemiştir. Gerçekten de, Zhang' ın sonucu $V(x)$ potansiyelinin fujita  ss  üzerinde nasıl g   l  bir etkisi olduğunu g  stermektedir.

Zhang (1999) ise, bazı geometrik varsayımlar altında,

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + u^p & , \quad M \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad M, \end{cases} \quad (2.6)$$

Cauchy probleminin $p > 1$ ve $\alpha \geq 2$ için pozitif çözümlerin varlığı incelenmiş ve aşağıda verilen sonuçlara ulaşmıştır:

- (i) $m \geq 1$ ve $m < p \leq m + \frac{2}{\alpha}$ olduğunda (2.6) probleminin global pozitif çözümü bulunmamaktadır.

- (ii) $1 - \frac{2}{\alpha} < m < 1$ ve $1 < p \leq m + \frac{2}{\alpha}$ olduğunda (2.6) probleminin global pozitif çözümü bulunmamaktadır.
- (iii) $m > 0$, $\alpha = n$ ve $p > m + \frac{2}{n}$ olduğunda (2.6) probleminin bazı $u_0 \geq 0$ için global pozitif çözümü bulunabilir.

Bu teze motivasyon sağlayan bir diğer çalışmada ise, Goldstein ve Kombe (2003)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta(u^m) + V(x)u^m & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.7)$$

denklemini için pozitif çözümün yokluğunun m nin değer aralığına ve spektruma bağlı olduğunu Cabré ve Martel tekniğini kullanarak ispatlamıştır.

Goldstein ve Kombe (2003), aynı çalışmalarında aşağıdaki p -Laplace denklemini ele almışlardır:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + V(x)u^{p-1}, & \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & \Omega, \\ u(x, t) = 0, & \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.8)$$

Burada $1 < p < 2$ ve $V(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$ için problemin pozitif çözümünün yokluğunun normalize p -enerji formunun spektrumuna bağlı olduğu sonucuna varılmıştır. $\mathcal{K}$, Ω 'nın Lebesgue ölçümü sıfır olan alt kümesi olmak üzere, bu form

$$\sigma_{\inf}^p := \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx - \int_{\Omega} V |\phi|^p dx}{\int_{\Omega} |\phi|^p dx} \quad (2.9)$$

ile tanımlanmaktadır.

Goldstein ve Kombe (2003), hem hızlı yayılım tipi (2.7) denklemini için, hem de p -Laplasyan tipi (2.8) denklemleri için aşağıdaki potansiyelleri ele almıştır:

$$\begin{aligned} \text{Hızlı Yayılım:} \quad & V(x) = \frac{c}{|x|^2}, \quad V(x) = \frac{c}{|x|^2} + \frac{\beta}{|x|^2} \sin\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right), \\ p\text{-Laplace:} \quad & V(x) = \frac{c}{|x|^p}, \quad V(x) = \frac{c}{|x|^p} + \frac{\beta}{|x|^p} \sin\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Burada $c > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ dır. İkinci potansiyel singüler olduğu gibi aynı zamanda fazlaca salınım yapan bir potansiyeldir. Salınımında hem pozitif hem de negatif kısımlar vardır ve bunlar kuadratik formda birbirini sadeleştirmektedir. Böylece pozitif çözümün yokluğunun sadece c değerinin büyüklüğüne bağlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda, (2.6) probleminde pozitif çözümlerin yokluğunun p ve m değerlerine, (2.7) probleminde ise m değerine ve (2.4) denkleminde ifade edilen spektrumun dibine bağlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmalardan yola çıkılarak, M Riemann manifoldu üzerinde, daha genel bir doğrusal olmayan parabolik tipte bir problemin pozitif çözümlerini inceleyerek, m , p ve (2.4) spektrumun dibi arasındaki ilişkiyi araştırmak akla gelmektedir.

Benzer şekilde, (2.8) denkleminde λu^q kaynak teriminin eklenmesi, Goldstein ve Kombe (2003)'nin elde etmiş oldukları sonuçları nasıl etkileyeceği sorusu ortaya çıkmaktadır. (2.9) denkleminde ifade edilen p -enerji formunda $\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx$ ve $\int_{\Omega} V |\phi|^p dx$ integral terimleri arasında bir yarış vardır. Bu yarışın sonucunda (2.9) ifadesi $-\infty$ olabilmektedir. Aslında bu sonuç V potansiyelinin seçimine bağlıdır. Bu durum, problemde ele alınacak yeni kritik potansiyellerin arayışına motivasyon sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında yukarıda ifade edilen soruları cevaplandırmak üzere, literatürde yer alan problemlerin bir çoğunu kapsayan (1.4) ve (1.5) denklemlerinin Riemann manifoldu üzerinde pozitif çözümlerinin yokluğunun nelere bağlı olduğu ispatlanmıştır. Pozitif çözümlerin yokluğu ele alınırken, (2.10) denkleminde belirtilen potansiyellerin yanı sıra, elde edilen yeni Hardy tipi eşitsizliklerden ortaya çıkan somut potansiyeller kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçların bir kısmı aşağıda verilen dergilerde yayınlanmıştır:

- * S. Bakim, G. R., Goldstein, J. A. Goldstein, I. Kombe. 2020. Fast diffusion equations on Riemannian manifolds. Differential and Integral Equations, 33 (9-10), 507-526.
- * G. R., Goldstein, J. A. Goldstein, I. Kombe, S. Bakim. 2021. Nonexistence results for parabolic equations involving the p -Laplacian and Hardy-Leray type inequalities on Riemannian manifolds. Journal of Evolution Equations, In Press.

3. ÖN BİLGİLER

3.1. Fonksiyon Uzayları

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlar ve uzaylar verilecektir. Detaylı bilgi için (Adams, 1975; Evans, 2002; Brezis, 2011) kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 3.1.1. (Lebesgue Uzayı $L^p(\Omega)$) Ω bölgesi, $\mathbb{R}^n$ üzerinde ölçülebilir bir küme ve ϕ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $|\phi(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir olması

$$\int_{\Omega} |\phi(x)|^p dx < \infty$$

demektir. O halde, $\phi(x)$ fonksiyonları *p. kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı* olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ ile gösterilir. $L^p(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanır. $L^p(\Omega)$ uzayında $p = 2$ alınırsa, $L^2(\Omega)$ uzayı, karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı olarak isimlendirilir. Bu uzay,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi \psi dx$$

iç çarpımı ile Hilbert uzayıdır.

Tanım 3.1.2. Bir kümenin, ölçüsü sıfır olan bir alt kümesi hariç her noktasında sağlanan bir özellik o kümenin hemen hemen her yerinde sağlanıyor denir.

Tanım 3.1.3. ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) Ω bölgesinde ölçülebilir bir ϕ fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|\phi(x)| \leq M$ şeklinde bir M sabiti bulunabiliyorsa, ϕ fonksiyonuna hemen hemen her yerde sınırlıdır denir.

Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı ϕ fonksiyonları ile tanımlanan uzaya $L^\infty(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzayda norm, şöyle tanımlanır:

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{M : |\phi| \leq M\}.$$

Tanım 3.1.4. ($L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ Uzayı) Ω bölgesi, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Ω bölgesinin her kompakt altkümesinde *p. kuvvetten integrallenebilen* tüm ölçülebilir

fonksiyonların uzayına p -yerel integrallenebilir fonksiyon uzayı denir ve $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için *destek*, $\text{supp}\phi$ ile ifade edilir ve Ω bölgesi üzerinde ϕ fonksiyonunun sıfır olmadığı noktaların kümesini tanımlar:

$$\text{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega : \phi(x) \neq 0\}}.$$

Eğer $\text{supp}\phi$ kümesi kompakt ise, ϕ fonksiyonu, Ω bölgesinde *kompakt desteğe sahiptir* denir. Bu fonksiyonun uzayı $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonları denir.

Tanım 3.1.6. Negatif olmayan α_i lerin $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, n bileşenlisine *çoklu indis* denir. Eğer,

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{aligned}$$

ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ise,

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad \text{ve} \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \\ &= D^{\alpha_2} u D^{\alpha_1} u \dots D^{\alpha_n} u \end{aligned}$$

yazılır.

Tanım 3.1.7. $f \in L^1_{\text{loc}}$ olsun ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \psi g dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha \psi dx$$

eşitliğinin sağlandığı $g \in L^1_{\text{loc}}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun α . zayıf (*genelleştirilmiş*) *türevi* denir ve $g = D^\alpha u$ ile ifade edilir.

Tanım 3.1.8. Ω bölgesi, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $1 \leq p \leq \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun.

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

ile tanımlanan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Yani, bu uzayda, fonksiyonun kendisi ve m . mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayındadır.

3.2. Riemann Manifoldu

Tezin bu bölümünde, Riemann manifoldu üzerindeki temel tanım ve yapılar verilecektir. Daha detaylı bilgi için (Gallot vd., 1993; Chavel, 2006; Grigor'yan, 2009; Sahin, 2012; Ozan, 2016) referanslarına başvurulabilir.

3.2.1. Diferansiyellenebilir manifoldlar

İlk olarak topoloji kavramı verilecektir.

Tanım 3.2.1. X bir küme ve τ , X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere,

- (i) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,
- (ii) τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi τ kümesine ait,
- (iii) τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi τ kümesine ait,

şartları sağlanıyorsa (X, τ) ikilisine bir *topoloji* adı verilir.

Bir X topolojik uzayında, X birbirinden farklı her x, y elemanları için bu noktaların ayrık komşulukları varsa, bu topolojik uzaya *Hausdorff uzayı* adı verilir. (X, τ) ve (X', τ') topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow X'$ fonksiyonu bire bir ve $x_0 \in X$ olsun. $f(x_0) \in X'$ noktasının her M' komşuluğu için $f(M) \subset M'$ olacak şekilde $x_0 \in X$ noktasının bir M komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında *sürekli* denir. Her $x_0 \in X$ noktasında sürekli $f : X \rightarrow X'$ fonksiyonuna *sürekli fonksiyon* denir. Eğer f fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve tersi sürekli ise, f fonksiyonuna *homeomorfizma* adı verilir. Homeomorfizma şartlarının sağlanması durumunda X topolojik uzayı X' uzayına *homeomorfik* olur.

Tanım 3.2.2. H bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in H$ için, $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık U komşuluğu varsa H Hausdorff uzayına *manifold* denir. Bu durumda $\text{boy}(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifold, n -boyutlu bir manifolddur.

Sınıra sahip bir M manifoldu için, M 'nin içi ($\text{Int}M$), M 'de yer alan, $\mathbb{R}^n$ 'in bir açık alt kümesine homeomorfik komşuluğa sahip noktalardan oluşan küme olsun. O halde, M 'nin sınırı ∂M , $\text{Int}M$ 'nin M 'deki tümleyenidir. Sınıra sahip n -boyutlu

bir M manifoldu için, $\text{Int}M$, n -boyutlu (sınırı olmayan) bir manifold ve ∂M sınırı $(n - 1)$ -boyutlu bir manifolddur.

Tanım 3.2.2’de ifade edilen homeomorfizma $\psi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise, (U, ψ) ikilisine bir *harita* (*chart*) denir. M manifoldundaki tüm noktaların en az bir haritada bulunması için U açık kümelerinin arakesitinin boştan farklı olması gerekir. ψ ’nin homeomorfizma olmasından dolayı, $p \in U$ noktasının koordinatlarının $x = \psi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanması mümkündür. Böylelikle, ψ homeomorfizması M manifoldunun bir p noktasına $(x_1(p), \dots, x_n(p))$, n -li koordinatlarını karşılık getirir.

Tanım 3.2.3. M , n -boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $U = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa U koleksiyonuna M üzerinde k . mertebeden diferansiyellenebilir yapı (*atlas*) adı verilir.

- (i) $\bigcup U_\alpha = M$,
- (ii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olduğunda, (U_α, ψ_α) ve (U_β, ψ_β) k . mertebeden uyumludur.
- (iii) Tamlık özelliği: Eğer bir (V, φ) haritası $(U_\alpha, \psi_\alpha) \in U$ tüm koordinat atlaslarıyla uyumlu olduğunda, $(V, \varphi) \in U$ olur.

Eğer atlas her mertebeden diferansiyellenebilir ise, M manifolduna C^∞ – manifold (diferansiyellenebilir manifold) denir. Bu manifoldlara aynı zamanda düzgün (*smooth*) manifold adı verilir.

Tanjant vektör kavramı, manifoldların geometrisinde en önemli kavramlardan biridir. Topolojik uzay olan bir manifold üzerinde, tanjant vektör kavramı yardımıyla, vektör uzayı yapısı elde edilebilecek ve böylece cebirsel teknikler kullanmak mümkün olabilecektir.

Tanım 3.2.4. M , diferansiyellenebilir bir manifold olsun. Bu takdirde, her $f, g \in C^\infty(M)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

- (i) $\xi(fa + gb) = a\xi(f) + b\xi(g)$
- (ii) $\xi(fg) = \xi(f)g + f\xi(g)$,

şartlarını sağlayan $\xi : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne, M manifoldunun bir $x \in M$ noktasındaki *tanjant vektörü* denir ve $T_x M$ ile gösterilir.

Tanjant vektörü kavramından faydalanılarak manifold üzerinde vektör alanı tanımını verelim.

Tanım 3.2.5. M , diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde, her $x \in M$ için $X \in T_x M$ olarak ifade edilen tanjant vektörlerinin ailesine *vektör alanı* adı verilir.

Böylece bir vektör alanı, $X : M \rightarrow \cup_{x \in M} T_x M$ diferansiyellenebilir bir dönüşümdür ve $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yerel koordinat sisteminde,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Vektör alanları gibi dual vektör alanları da tanımlanabilir. M , diferansiyellenebilir manifoldu için, $T_x M$ vektör uzayının dual uzayı $T_x^* M$ ile gösterilsin. $w_x \in T_x^* M$ olmak üzere $w_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü lineerdir. $T_x M$ uzayında herhangi bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazının, $T_x^* M$ dual uzayında karşılık gelen bir $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ dual bazı vardır öyle ki,

$$\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i := \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

dir. $T_x M$ tanjant uzayının dual uzayı olan $T_x^* M$ dual uzayına *kotanjant uzayı* adı verilir. Bu uzayının elemanları ise dual vektör (kovektör) olarak adlandırılır. M manifoldunun bir $x \in M$ noktasına dual vektör karşılık getiren dönüşümüne dual vektör alanı ya da 1-form denir ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$w_x = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$$

şeklinde ifade edilir. Burada $dx_i, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ yerel koordinatına sahip bir manifoldun $T_x M$ tanjant uzayında $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bazına karşılık gelen dual bazdır. Benzer şekilde n -form

$$w_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

olarak yazılır.

Şimdiye kadar bir topolojik manifold üzerinde diferansiyel yapı ve vektör uzayı yapısı kurularak, manifoldun geometrisini incelemek için faydalanılacak araçlar elde edilmiştir.

Riemann manifoldu, manifold üzerindeki her noktada tanjant uzayının iç çarpım uzayına dönüştürülmesini sağlamaktadır.

3.2.2. Riemann manifoldunda analiz

Bu altbölümde bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan gradyan, diverjans ve Laplasyan operatörleri tanıtılmakta ve temel özellikleri verilmektedir. İlk olarak Riemann metriği kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.2.6. M , diferansiyellenebilir bir manifold ve $T_x M$ bu manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi olsun. O halde,

$$g : T_x M \times T_x M \rightarrow C^\infty M$$

ile tanımlanan g simetrik, pozitif tanımlı bilineer form ise, yani her $X, Y \in T_x M$ için,

$$(i) \quad g(X, Y) = g(Y, X)$$

$$(ii) \quad g(X, X) \geq 0 \text{ ve her } X \text{ için } g(X, X) = 0 \iff X = 0$$

şartları sağlanıyorsa, g formuna *Riemann metriği* (ya da *metrik tensör*) denir. (M, g) ikilisine de Riemann manifoldu adı verilir.

Şimdi eğri uzunluğu tanımını verelim.

Tanım 3.2.7. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisi diferansiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisinin uzunluğu

$$l[\gamma] = \int_I |\gamma'(t)| dt$$

integrali ile verilmektedir.

Yukarıda tanımlanan eğri uzunluğu ds ile gösterilmektedir ve böylece metrik tensör

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j$$

olarak gösterilmektedir.

Şimdi sırası ile Riemann manifoldu üzerinde tanımlı gradyan, diverjans ve Laplace operatörleri verilecektir.

Tanım 3.2.8. (M, g) bir Riemann manifoldu ve f fonksiyonu, M üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun bir $x \in M$ noktasındaki gradyanı,

$$\nabla_g f(x) = g^{-1}(x)df(x)$$

olarak tanımlanmaktadır.

Ayrıca $X \in T_x M$ olsun ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$, g indisine bağlı skaler çarpımı göstereyin. O halde

$$\langle \nabla_g f, X \rangle = df(X) = Xf$$

ifadesi elde edilir. Lokal koordinatlarda, (g^{ij}) , (g_{ij}) nin ters matrisi olmak üzere,

$$(\nabla_g f)_i := \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

için,

$$\nabla_g f = ((\nabla_g f)_1, \dots, (\nabla_g f)_n)$$

ve

$$|\nabla_g f|^2 = \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

olduğu görülür.

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde düzgün bir X vektör alanının diverjansı $\text{div}_g X$, aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Teorem 3.1. (Diverjans Teoremi) M Riemann manifoldu üzerinde bir C^∞ -vektör alanı X için, M üzerinde $\text{div}_g X$ ile ifade edilen tek bir düzgün (*smooth*) fonksiyon vardır öyle ki, her $\phi \in C_0^\infty(M)$ için,

$$\int_M (\text{div}_g X) \phi dv_g = - \int_M \langle X, \nabla_g \phi \rangle dv_g$$

ifadesi sağlanır.

Yukarıda verilen diverjans operatörü, lokal koordinatlarda

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det g_{ij}} X_i)$$

olarak ifade edilebilir. Özel olarak $\det g_{ij} \equiv 1$ olduğunda $\mathbb{R}^n$ 'de Öklid diverjansı $\operatorname{div} X = \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ elde edilir.

Gradyan ve diverjans tanımları kullanılarak, (M, g) Riemann manifoldu üzerinde Laplace operatörü tanımlanabilir.

Tanım 3.2.9. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $f : (M, g) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyon olsun. (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Laplasyanı,

$$\Delta_g f = \operatorname{div}_g(\nabla_g f)$$

olarak tanımlanır. Lokal koordinatlarda,

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j})$$

şeklinde ifade edilebilir.

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde p-Laplace operatörü ise,

$$\Delta_{p,g} f = \operatorname{div}_g(|\nabla_g f|^{p-2} \nabla_g f)$$

ile verilmektedir. Burada $p = 2$ alındığında bilinen Laplace-Beltrami operatörü elde edilir.

Riemann manifoldu üzerinde integral tanımlanabilmesi için öncelikle yönlendirilebilir manifold tanımı verilecektir.

Tanım 3.2.10. n -boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldunun yönlendirilebilir olması için, M üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan bir w formunun varlığı gerekli ve yeterlidir.

Şimdi, M manifoldu üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan bir w n - formu olduğunu kabul edelim (M yönlendirilebilir manifold). $U \subset M$ olacak şekilde bu formun sıfırdan farklı olduğu noktalar kümesi,

$$\operatorname{supp}(w) = \{\overline{x \in U | w \neq 0}\}$$

kompakt ise, bu forma *kompakt destekli form* denir. U alt kümesi üzerindeki her form $w = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ olarak yazılabileceğinden $\text{supp}(w) = \text{supp}(f)$ olacaktır. Bu takdirde, U açık kümesi üzerindeki w formunun integrali,

$$\int_U w = \int_U f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int_U f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

olarak tanımlanır. İntegrali alınan formun sıfırdan farklı olduğu kümenin kapanışı kompakt olduğu için yukarıda ifade edilen integral sonludur.

Riemann integralinde, $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ alarak,

$$\int_U f dx_1 \dots dx_n = \int_U f dx_{i_1} \dots dx_{i_n}$$

şeklinde değişkenlerin sırası değiştirilerek yazılabilir. Ancak yukarıda tanımlanmış olan $w = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ formundaki koordinatların sırası önemlidir. Örneğin bir w 2-formu için,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} (-f(x_1, x_2)) dx_2 \wedge dx_1 = - \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

olur.

Yönlendirilebilir bir Riemann manifoldu üzerinde $x_1, \dots, x_n$ koordinatları için Riemann hacim elemanı, $g = \det(g_{ij})$ olmak üzere,

$$dv_g = \sqrt{g} dx_1 \dots dx_n$$

şeklinde ifade edilir. Hacim elemanı, diferansiyellenebilir bir n -formdur ve hiçbir yerde sıfır değildir. Bu ifade ile bir M manifoldunun hacmi

$$\text{Vol}(M) = \int_M dv_g$$

olarak tanımlanır. Bu çalışmada ele alınan M Riemann manifoldunun yönlendirilebilir olduğu kabul edilecektir.

Şimdi, Green özdeşliklerinin Riemann manifoldu üzerindeki genellemesi verilecektir.

Teorem 3.2. M Riemann manifoldu üzerinde, en az biri kompakt desteğe sahip, C^∞ sınıfından olan ϕ ve ψ fonksiyonları için,

$$\int_M \phi \Delta_g \psi dv_g = \int_M \psi \Delta_g \phi dv_g$$

eşitliği geçerlidir.

Bu alt bölümde son olarak Riemann manifoldu üzerinde polar koordinatlar tanıtılacaktır. x noktası, M Riemann manifoldu üzerinde bir nokta ve γ_v^x ise, t eğri uzunluğu ile parametrize edilen, x noktasından geçen ve $t = 0$ anındaki teğet vektörü v olan birim vektöre sahip jeodezik olsun. $0 \in T_x(M)$ olacak şekilde, orijinin uygun bir U komşuluğunda,

$$\exp_x : U \subseteq T_x(M) \rightarrow M$$

$$tv \mapsto \gamma_v^x(t)$$

şeklinde iyi tanımlı bir $\exp_x$ dönüşümü vardır. Bu dönüşüme *üstel dönüşüm* adı verilmektedir.

$\exp_x$ üstel dönüşümü altında, $T_x(M)$ nin polar koordinatları, M üzerinde ve x noktası civarındaki koordinatlardır. Bunlara M üzerinde *jeodezik koordinatlar* denir ve $r, \theta_1, \theta_2, \dots$ ile gösterilir. Bu koordinatlarda,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = 1 \quad \text{ve} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\rangle = 0$$

sağlanır. Polar koordinatlarda r , bir noktanın orijine olan uzaklığını temsil eder ve buna dik olan $n - 1$ tane koordinat bulunmaktadır. Öklid metriği, polar koordinatlarda,

$$g_{\mathbb{R}^n} = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

ile verilmektedir. Burada r parametresi $(0, \infty)$ aralığındadır, yani, $r = 0$ da polar koordinatlar iyi tanımlı değildir.

n -boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldunun metriği, polar koordinatlarda,

$$g = dr^2 + \omega^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}} \tag{3.1}$$

ile verilmektedir. Burada $\omega(r)$ fonksiyonu, r_0 değeri model manifoldun yarıçapı olmak üzere, $(0, r_0)$ aralığında pozitif bir fonksiyondur ve $\omega(0) = 0$ ve $\omega'(0) = 1$ şartlarını

sağlamaktadır. Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ de, $r_0 = \infty$ ve $\omega(r) = r$ dir.

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde, (3.1) ile verilen metrikle tanımlı Riemann hacim elemanı, polar koordinatlarda,

$$dv_g = \omega(r)^{n-1} dr d\theta$$

ile tanımlanmaktadır. Burada $d\theta$, $\mathbb{S}^{n-1}$ üzerinde Riemann ölçüsünü temsil etmektedir.

Son olarak (M, g) üzerinde Laplace-Beltrami operatörü,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{d}{dr} \log \omega^{n-1} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\omega^2(r)} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Yani, $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bu operatör,

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{n-1}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

şeklindedir.

3.3. Eşitsizlikler

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde yapılan ispatlarda kullanılan bazı önemli eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.3. (Cauchy Eşitsizliği) $\epsilon > 0$ olmak üzere, $x, y \in \mathbb{R}$ için,

$$|xy| \leq \frac{\epsilon}{2} |x|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |y|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.4. (Hardy Eşitsizliği) $1 < p < n$ olmak üzere, her $\phi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $(\frac{n-p}{p})^p$ sabiti en iyi sabittir (Azorero ve Alonso, 1998).

Teorem 3.5. (Hölder Eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\phi \in L^p(\Omega)$, $\psi \in L^q(\Omega)$ olsun. Bu durumda, $\phi\psi \in L^1(\Omega)$ olur ve

$$\int_{\Omega} |\phi\psi| dx \leq \left(\int_{\Omega} |\phi|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |\psi|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliği geçerlidir (Evans, 2002).

Tanım 3.3.1. Bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her bir $0 \leq \tau \leq 1$ için,

$$f(\tau y + (1 - \tau)x) \geq \tau f(y) + (1 - \tau)f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona *konkav fonksiyon* denir.

Teorem 3.6. (Jensen Eşitsizliği) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konkav olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi açık ve sonlu Lebesgue ölçümüne sahip olmak üzere, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} (f \circ g) d\mu \leq f \left(\frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} g d\mu \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada μ Lebesgue ölçüsüdür.

Teorem 3.7. Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

(i) $1 < p < 2$ ise,

$$|x + y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x \cdot y + c(p) \frac{|y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}} \quad (3.2)$$

(ii) $p \geq 2$ ise,

$$|x + y|^p \geq |x|^p + p|x|^{p-2}x \cdot y + c(p)|y|^p \quad (3.3)$$

eşitsizlikleri, $c(p) = \frac{1}{2^{p-1}-1}$ sabiti için sağlanır (Lindqvist, 1990).

Teorem 3.8. (Sobolev Eşitsizliği) $1 < p < n$ ve $p^* = \frac{pn}{n-p}$ olmak üzere, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ için,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|^p dx \right)^{1/p} \quad (3.4)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı vardır.

Teorem 3.9. (Young Eşitsizliği) $x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

eşitsizliği vardır (Evans, 2002).

Teorem 3.10. (ϵ 'lu Young Eşitsizliği) Eğer $\epsilon > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise, bu durumda,

$$|xy| \leq \epsilon |x|^p + c(\epsilon) |y|^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, $c(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ dir.

3.3.1. Sobolev tipi eşitsizlikler

Bu bölümde, beşinci ve altıncı bölümlerde yer alan teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan Sobolev tipi eşitsizlikler verilecektir.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında sağlanan (3.4) Sobolev eşitsizliğinin, Öklid uzayında yapılan analizlerde ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesindeki rolü oldukça önemlidir. Ancak genel bir manifold için bu eşitsizlik sağlanmayabilir. Aslında Sobolev eşitsizliği, manifoldun geometrisi ile ilgilidir. Bu yüzden geometrik koşul olarak kabul edilmektedir. M Riemann manifoldunun parabolik olmaması (*nonparabolicity*) olarak bilinen bu geometrik koşul, M üzerinde Laplace Beltrami operatörü için sonlu (minimal) bir pozitif Green fonksiyonunun varlığı olarak ifade edilmektedir. Sobolev eşitsizliklerinin Riemann manifoldu üzerindeki geçerliliği ile ilgili detaylı bilgi için (Saloff-Coste, 2001; Hebey, 2000) kaynaklarına bakılabilir.

n - boyutlu bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde, $1 \leq p < n$ ve $p^* = \frac{pn}{n-p}$ olmak üzere, her $\phi \in C_0^\infty(M)$ için,

$$\left(\int_M |\phi|^{p^*} dv_g \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_M \left(\int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.5)$$

olacak şekilde bir $C_M > 0$ sayısı varsa, Öklid tipi L^p Sobolev eşitsizliği sağlanmaktadır.

Benzer şekilde, her $\phi \in C_0^\infty(M)$ için,

$$\left(\int_M |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_M \int_M |\nabla_g \phi|^2 dv_g \quad (3.6)$$

olacak şekilde bir $C_M > 0$ sayısı varsa, Öklid tipi L^2 Sobolev eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Bu tez çalışmasında ele alınan Ω bölgesi sınırlı ve $\overline{\Omega}$ (Ω nın kapanışı) da kompakt bir küme olduğundan Öklid tipi Sobolev eşitsizliği sağlanmaktadır.

4. HİPERBOLİK UZAY

Hiperbolik geometri, on dokuzuncu yüzyılın ilk yarısında, Öklid'in geometri için kurmuş olduğu aksiyomların temellerini anlama girişimleri sırasında ortaya çıkmıştır. Bu geometri Öklid-olmayan geometrilerden biridir ve Öklidin aksiyomlarından Paralellik postulatını sağlamamaktadır. Einstein ve Minkowski, Öklid-olmayan geometri ile, fiziksel zaman ve uzay için geometrik temeller bulmuşlardır.

Hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$ olmak üzere, sabit eğriliği -1 olan tam, basit bağlantılı bir Riemann manifoldudur. Hiperbolik uzayın sınırı, $\mathbb{H}^n$ in sonsuzunda olan noktalardan oluşur ve $\partial\mathbb{H}^n$ ile gösterilir. n -boyutlu hiperbolik uzay için farklı modeller vardır: Üst yarı düzlem modeli, Poincaré yuvar modeli, Klein modeli, hiperboloid modeli. Öklid uzayının başka alt uzaylarında tanımlı olan bu modellerin her biri izometrik olarak birbirine diffeomorfiktir. Detaylı bilgi için (Benedetti ve Petronio, 1992; Anderson, 2005; Ratcliffe, 2006) kaynaklarına bakılabilir.

Öklid uzayının $(n + 1)$ boyutlu,

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1, x_{n+1} > 0\}$$

alt kümesini ele alalım. Burada metrik,

$$d_H(x, y) = \operatorname{arccosh}(-x_1y_1 - \dots - x_ny_n + x_{n+1}y_{n+1})$$

olarak tanımlanır. (H^n, d_H) metrik uzayı, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ in *hiperboloid modeli* olarak adlandırılır. Bu yüzeyin bir düzleme izdüşümü ile çeşitli modeller oluşturulabilir. Bu tez çalışmasında hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ 'in, Poincaré yuvar modeli $\mathbb{B}^n$ kullanılacaktır.

Şimdi,

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n | |x| < 1\}$$

Öklid birim yuvarını ele alalım.

$$\zeta : H^n \rightarrow \mathbb{B}^n$$

$$x \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

stereografik izdüşümü, H^n i uyumlu olarak $\mathbb{B}^n$ e eşler. Burada geometri çemberin içinde

kalan noktalardan oluşmaktadır. Bu izdüşümün en önemli özelliği, açıları ve çemberleri korumasıdır. γ , $\mathbb{B}^n$ de hiperbolik bir jeodezik ve $a \in \mathbb{B}^n$, γ üzerinde olmayan bir nokta ise, o halde γ ile kesişmeyen ve dolayısıyla γ ya paralel olan sonsuz sayıda jeodezik vardır.

Öklid birim yuvarı $\mathbb{B}^n$ de, $x_1, x_2, \dots, x_n$ kartezyen koordinatları ile hiperbolik metrik, $p(x) = \frac{2}{1-|x|^2}$ olmak üzere,

$$g_{\mathbb{B}^n} = p^2(x)g_{\mathbb{R}^n}$$

ile verilmektedir. Burada $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ve $g_{\mathbb{R}^n} = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2$ metriği, Öklid metriğidir. $r = |x|$ olmak üzere,

$$ds = \frac{2}{1-|x|^2} |dx| := w(r)dx$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada, $\{pdx_i\}_{i=1}^n$, $\mathbb{B}^n$ de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ teğet uzayının ortonormal bir bazını verir. Karşılık gelen dual baz ise, $\{\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ dir. Bu metrik ile tanımlı $\mathbb{B}^n$ yuvarına hiperbolik uzayın *Poincaré yuvar modeli* adı verilir. Bu modelde hiperbolik gradyant ve Laplace Beltrami operatörü,

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi = \frac{\nabla \phi}{p}$$

ve

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) = p^{-n} \operatorname{div}(p^{n-2} \nabla \phi)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada ∇ Öklidyen gradyantı, div Öklidyen diverjansı belirtmektedir.

$x, y \in \mathbb{B}^n$ olmak üzere, Poincaré yuvar modelinde uzaklık,

$$d_{\mathbb{H}^n}(x, y) = \operatorname{arc} \cosh \left(1 + \frac{2|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} \right)$$

formülü ile hesaplanır. O halde $x \in \mathbb{B}^n$ noktasının orijine olan uzaklığı

$$\rho(x) := d_{\mathbb{H}^n}(0, x) = \operatorname{arc} \cosh \left(\frac{1+|x|^2}{1-|x|^2} \right)$$

olur. $\operatorname{arc} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ olduğundan,

$$\rho(x) = 2 \operatorname{arc} \tanh |x| = \log \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right)$$

ifadesi elde edilir. Böylece, $d(x) := \log \left(\frac{1+|x|}{1-|x|} \right)$ uzaklık fonksiyonu için aşağıda verilen iki bağıntı elde edilir:

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} d| = 1 \quad \text{ve} \quad \Delta_{\mathbb{H}^n} d \geq \frac{n-1}{d}.$$

Jeodezik koordinatlarda uzaklık fonksiyonu,

$$\rho(x) = \int_0^r \frac{2}{1-s^2} ds = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

dir. Buradan,

$$\mp \frac{\rho}{2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\mp \frac{1}{2}}$$

eşitliği yardımıyla,

$$\tanh \frac{\rho}{2} = \frac{e^{\rho/2} - e^{-\rho/2}}{e^{\rho/2} + e^{-\rho/2}} = r$$

ilişkisi elde edilir.

Hiperbolik hacim elemanı, $g = \det(g_{ij})$ olmak üzere,

$$dv = \sqrt{g} dx = p^n(x) dx = \frac{2^n}{(1-|x|^2)^n} dx = \left(\frac{2}{1-r^2} \right)^n r^{n-1} dr d\theta$$

dır. Burada dx , $\mathbb{B}^n$ de Lebesgue ölçüsünü ve $d\theta$, $\mathbb{S}^{n-1}$ üzerinde normalize yüzey ölçüsünü ifade etmektedir. Buna göre,

$$dv = \omega^n(r) r^{n-1} dr d\theta$$

ifadesinde,

$$r = \tanh \frac{\rho}{2}, \quad dr = \frac{d\rho}{2 \cosh^2(\frac{\rho}{2})}$$

ve

$$w(r) = \frac{2}{1-r^2} = \frac{2}{1-(\tanh \frac{\rho}{2})^2} = 2(\cosh \frac{\rho}{2})^2$$

eşitlikleri yerine yazıldığında, jeodezik polar koordinatlarda hacim elemanı dv ,

$$\begin{aligned} dv &= 2^n (\cosh \frac{\rho}{2})^{2n} (\tanh \frac{\rho}{2})^{n-1} \frac{d\rho}{2 \cosh^2(\frac{\rho}{2})} d\theta \\ &= 2^{n-1} (\cosh \frac{\rho}{2})^{n-1} (\sinh \frac{\rho}{2})^{n-1} d\rho d\theta \\ &= (\sinh \rho)^{n-1} d\rho d\theta \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda, $f \in L^1(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonu için polar koordinatlarda integrasyon formülü,

$$\int_{\mathbb{H}^n} f dv = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(\rho, \theta) d\theta \right) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho$$

ile verilir.

$\Omega' \subset \mathbb{H}^n$ ve $\Omega \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ bölgesi Ω' bölgesinin Öklid koordinatlarına karşılık gelsin. O halde Dirichlet integrali,

$$\int_{\Omega'} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 p^{n-2} dx$$

olarak yazılır. Burada $\nabla_{\mathbb{H}^n} = \frac{1-r^2}{2} \nabla$ ve $|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 = \langle \nabla_{\mathbb{H}^n} \phi, \nabla_{\mathbb{H}^n} \phi \rangle$ çarpımı, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile verilen metriğe göre iç çarpımdır.

$\mathbb{B}^n$ de, 0 merkezli ve $R \in (0, \infty)$ yarıçaplı hiperbolik yuvar,

$$\mathbf{B}_R(0) = \{x \in \mathbb{B}^n | d_{\mathbb{H}^n}(0, x) < R\}$$

ile ifade edilir. Burada $\mathbf{B}_R(0)$, aynı zamanda 0 merkezli ve $S = \tanh \frac{R}{2} \in (0, 1)$ yarıçaplı Öklid yuvarıdır. $\mathbf{B}_R$ hiperbolik yuvarın hacmi,

$$\text{Vol}(\mathbf{B}_R) = nw_n \int_0^R (\sinh \rho)^{n-1} d\rho$$

olarak hesaplanır. Burada w_n , n -boyutlu Öklidyen birim yuvarının hacmini ifade

etmektedir. Hacim integrali için,

$$\text{Vol}(\mathbf{B}_R) = nw_n \int_0^R (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \leq w_n (\sinh R)^n$$

yaklaşımı yapılabilir.

5. HIZLI YAYINIM TİPİ DENKLEM ve UYGULAMALARI

5.1. Hızlı Yayınım Tipi Denklem

Bu bölümde, aşağıda verilen hızlı yayınım tipi denklemin pozitif çözümünün varlığı incelenecektir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g(u^m) + V(x)u^m + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (5.1)$$

Burada Ω bölgesi, kompakt olmayan bir tam M Riemann manifoldunda düzgün bir sınıra sahip, sınırlı bir bölge olmak üzere, $0 < m < 1$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir.

Pozitif çözümler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 5.1.1. $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan, *sürekli yerel pozitif u çözümleri* aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- (i) $\mathcal{K}$, Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kapalı bir alt küme,
- (ii) $u : [0, T) \longrightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu, bazı $T > 0$ değerleri için sürekli,
- (iii) $(x, t) \longrightarrow u(x, t) \in C((\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T))$,
- (iv) $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde $u(x, t) > 0$,
- (v) $\lim_{t \rightarrow 0} u(., t) = u_0$,
- (vi) u , (5.1) denkleminin çözümü olmak üzere, $\nabla u \in L^2_{loc}(\Omega \setminus \mathcal{K})$.

Uyarı 5.1. Eğer, $0 < a < b < T$ ve $\mathcal{K}_o$, $\Omega \setminus \mathcal{K}$ bölgesinin kompakt bir alt kümesi ise, bazı $\epsilon_1 > 0$ ve $(x, t) \in \mathcal{K}_o \times [a, b]$ için $u(x, t) \geq \epsilon_1 > 0$ olur. (iii) ve (iv) ifadeleri şu şekilde zayıflatılabilir:

- (iii)' $u(x, t)$ pozitif ve $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde yerel olarak sınırlı,
- (iv)' $\frac{1}{u(x, t)}$, $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde yerel olarak sınırlıdır.

Eğer u çözümü (i), (ii), (iii)', (iv)', (v), ve (vi) ifadelerini sağlıyorsa, $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan *genelleştirilmiş yerel pozitif çözüm* olarak adlandırılır. Bu ifade, $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan, yerel pozitif sürekli çözümlerden daha geneldir. Eğer $\mathcal{K} = \emptyset$ ise, u çözümü basitçe, *genelleştirilmiş pozitif yerel çözüm* olarak adlandırılır.

Bu bölümün ana teoremini vermeden önce, teoremin ispatında kullanılacak olan önerme ispatı ile verilecektir. Bu önermenin ispatında Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Önerme 5.1. M , boyutu $n \geq 3$ olan tam, kompakt olmayan bir Riemann manifoldu ve Ω bölgesi, M de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olsun. $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere, her $\epsilon > 0$ için,

$$\left| \int_{\Omega} a|\phi|^2 dv_g \right| \leq \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g + C(\epsilon, a) \int_{\Omega} |\phi|^2 dv_g \quad (5.2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C(\epsilon, a)$ pozitif sayısı vardır.

Kanıt. Hemen hemen her $x \in \Omega$ ve $k \geq 1$ için $(a_k)_{k \geq 1}$ dizisi $a_k(x) := \min \{a(x), k\}$ olarak tanımlansın. O halde,

$$k \longrightarrow \infty \quad \text{ için } \quad a_k \longrightarrow a \quad \text{ ve } \quad a \in L^{n/2}(\Omega) \quad (5.3)$$

olduğu görülebilir. Bu durumda,

$$\left| \int_{\Omega} a|\phi|^2 dv_g \right| \leq \int_{\Omega} |a - a_k| |\phi|^2 dv_g + k \int_{\Omega} |\phi|^2 dv_g \quad (5.4)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (5.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime, $n/(n-2)$ ve $n/2$ eşlenik kuvvetlerle Hölder eşitsizliği uygulandığında,

$$\left| \int_{\Omega} a|\phi|^2 dv_g \right| \leq \left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{2n}{n-2}} dv_g \right)^{\frac{n-2}{n}} + k \int_{\Omega} |\phi|^2 dv_g$$

ifadesi elde edilir. Burada Ω bölgesi sınırlı olduğundan, (3.6) denkleminde verilen Sobolev eşitsizliği bu bölgede geçerlidir. Böylece,

$$\left| \int_{\Omega} a|\phi|^2 dv_g \right| \leq \left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \left(C \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g \right) + k \int_{\Omega} |\phi|^2 dv_g$$

yazılabilir. (5.3) ile ifade edilen limit sayesinde, verilen her $\epsilon \in (0, 1)$ için,

$$\left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{2}} dv_g \right)^{\frac{2}{n}} \leq \frac{\epsilon}{2(1 - \epsilon)C}.$$

eşitsizliğini sağlayan $k(\epsilon) \geq 1$ ve bir $C > 0$ sabiti vardır. Son olarak $k = k(\epsilon)$ alınması ile istenilen (5.2) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bu bölümün ana teoremi ispatı ile verilecektir.

Teorem 5.1. M , boyutu $n \geq 3$ olan tam, kompakt olmayan bir Riemann manifoldu ve Ω bölgesi, M de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, $\frac{n-2}{n} \leq m < 1$, $m < q < \frac{2}{n} + m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $V(x) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \mathcal{K})$ olsun. Burada $\mathcal{K}$, Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kapalı bir alt kümedir. Verilen $\epsilon > 0$ için, eğer

$$\sigma_{\inf}((1 - \epsilon)V, \Omega) := \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g - \int_{\Omega} (1 - \epsilon)V|\phi|^2 dv_g}{\int_{\Omega} |\phi|^2 dv_g} = -\infty \quad (5.5)$$

ise, (5.1) probleminin $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Herhangi $T > 0$ için, $u : [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$, $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesinde, $u_0 \geq 0$ fakat sıfıra eşit olmayan, (5.1) probleminin bir genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü olsun.

(5.1) denkleminin her iki tarafı, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})$ olmak üzere, ϕ^2/u^m test fonksiyonu ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - m} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(x) dv_g &= \int_{\Omega} (\Delta_g u^m) \frac{\phi^2}{u^m} dv_g + \int_{\Omega} V(x) \phi^2(x) dv_g \\ &\quad + \lambda \int_{\Omega} u^{q-m} \phi^2(x) dv_g \end{aligned} \quad (5.6)$$

elde edilir. Diverjans teoremi yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - m} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(x) dv_g &= \int_{\Omega} (m^2 \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla_g u|^2 - 2m \frac{\phi}{u} \nabla_g u \cdot \nabla_g \phi) dv_g \\ &\quad + \int_{\Omega} V(x) \phi^2(x) dv_g + \int_{\Omega} \lambda u^{q-m} \phi^2 dv_g \end{aligned} \quad (5.7)$$

bulunur. (5.7) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terimin kare açılımından,

$$\int_{\Omega} (m^2 \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla_g u|^2 - 2m \frac{\phi}{u} \nabla_g u \cdot \nabla_g \phi) dv_g \geq - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g \quad (5.8)$$

olduğu açıktır. Şimdi (5.8) denklemi, (5.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} V(x)\phi^2(x)dv_g - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g &\leq \frac{1}{1-m} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{1-m} \phi^2(x) dv_g \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} u^{q-m} \phi^2(x) dv_g \end{aligned} \quad (5.9)$$

sonucunu verir. Son ifade t_1 den t_2 ye ($0 < t_1 < t_2 < T$) integre edildiğinde,

$$\int_{\Omega} V(x)\phi^2(x)dv_g - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g \leq L + R \quad (5.10)$$

bulunur. Burada

$$L = \frac{1}{(1-m)(t_2 - t_1)} \int_{\Omega} \left(u^{1-m}(x, t_2) - u^{1-m}(x, t_1) \right) \phi^2(x) dv_g$$

ve

$$R = -\lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u^{q-m}(x, t) \phi^2(x) dv_g dt$$

dir. u^{1-m} , u nun bir konkav fonksiyonu olduğundan, Jensen eşitsizliği yardımı ile

$$u^{1-m}(x, t_i) \in L^{n/2}(\Omega)$$

olduğu görülür. Şimdi (5.6) denklemindeki son terimi inceleyelim.

$$F(x) := -\lambda \int_{t_1}^{t_2} u^{q-m}(x, t) dt$$

olarak tanımlansın. Jensen eşitsizliği uygulandığında

$$F(x) \in L^{n/2}(\Omega)$$

olduğu görülür. Önerme 5.1 yardımıyla,

$$L + R \leq \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g + C(\epsilon, a, \lambda, q, \Omega) \int_{\Omega} \phi^2 dv_g \quad (5.11)$$

ifadesine ulaşılır. Burada ϕ nin reel olduğunu varsayalım. (5.11) denklemi (5.10)

denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} V(x)\phi^2(x)dv_g - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g &\leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g \\ &+ C(\epsilon, a, \lambda, q, \Omega) \int_{\Omega} \phi^2 dv_g \end{aligned} \quad (5.12)$$

olduğu görülür. (5.12) denklemi,

$$\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g - \int_{\Omega} (1-\epsilon)V(x)\phi^2(x)dv_g \geq -(1-\epsilon)C(\epsilon, a, \lambda, q, \Omega) \int_{\Omega} \phi^2 dv_g \quad (5.13)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^2 dv_g - \int_{\Omega} (1-\epsilon)V(x)\phi^2 dv_g}{\int_{\Omega} \phi^2 dv_g} > -\infty.$$

olur. Bu ise Teorem 5.1’de verilen varsayımlar ile çelişir. O halde, istenen koşullar altında (5.1) probleminin pozitif bir çözümü yoktur.

5.2. Teorem 5.1’in Uygulamaları

Keskin sabitli Hardy ve Leray tipi eşitsizlikler, Teorem 5.1 in uygulamalarında kullanılmak üzere bize somut potansiyeller vermektedir. Bu bölümdeki uygulamalar hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ ’in bir Ω bölgesinde verilecektir.

İlk olarak $c > 0$ olmak üzere, $V_H = \frac{c}{\rho^2}$ Hardy potansiyelini ele alalım.

Sonuç 5.1. $n \geq 3$ ve $0 \in \Omega$ olmak üzere Ω , $\mathbb{H}^n$ üzerinde $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $C_H = (\frac{n-2}{2})^2$ ve $V = \frac{c}{\rho^2}$ olsun. Eğer $c > C_H$ ve $\frac{n-2}{n} \leq m < 1$ ise, (5.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\}$ dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Daha önce de belirtildiği gibi göstermemiz gereken,

$$\sigma_{\inf}((1-\epsilon)V) = \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2} |\phi|^2 dv}{\int_{\Omega} |\phi|^2 dv} \quad (5.14)$$

ifadesinin $-\infty$ olduğudur.

$\epsilon > 0$ olmak üzere, radyal $\phi(x) = \varphi(\rho)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\phi(x) = \varphi(\rho) = \begin{cases} \epsilon^{\frac{-n}{2}} \rho & , \quad 0 \leq \rho \leq \epsilon, \\ \rho^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} & , \quad \epsilon \leq \rho \leq 1, \\ 2 - \rho & , \quad 1 \leq \rho \leq 2, \\ 0 & , \quad \rho \geq 2. \end{cases} \quad (5.15)$$

O halde, $\phi(x)$ fonksiyonunun türevi,

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi(x)|^2 = \begin{cases} \epsilon^{-n} & , \quad 0 < \rho < \epsilon, \\ \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \rho^{-n} & , \quad \epsilon < \rho < 1, \\ 1 & , \quad 1 < \rho < 2, \\ 0 & , \quad \rho > 2 \end{cases} \quad (5.16)$$

şeklindedir. Genelliği bozmadan, $B_2 = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \rho < 2\} \subset \Omega$ olduğunu varsayalım. Aksi halde, ϕ fonksiyonunun son iki satırındaki 2 yerine R yazılarak (5.15) denklemi, $B_R \subset \Omega$ olacak şekilde yeniden tanımlanır. Bu tanımlama ile, ispatın devamında yalnızca notasyonel değişiklikler olacaktır.

Ω bölgesi üzerinde, (5.16) integralinin jeodezik polar koordinatlarda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv &= n\omega_n \left(\int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right. \\ &\quad + \int_\epsilon^1 \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &\quad \left. + \int_1^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

olduğu kolayca görülebilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} (1 - \epsilon)c \int_{\Omega} \frac{|\phi|^2}{\rho^2} dv &= c(1 - \epsilon)n\omega_n \left(\int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right. \\ &\quad + \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &\quad \left. + \int_1^2 \left(\frac{2-\rho}{\rho}\right)^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanır. (5.17) ve (5.18) denklemlerinden, göstermek istediğimiz (5.14) ifadesinde yer alan spektrumun payında bulunan ifade,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2} |\phi|^2 dv &= n\omega_n A \int_0^\epsilon (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&+ n\omega_n B \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&+ n\omega_n \int_1^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&+ n\omega_n C \int_1^2 \left(\frac{2-\rho}{\rho}\right)^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho
\end{aligned} \tag{5.19}$$

olur. Burada $A = \epsilon^{-n}(1 - c(1 - \epsilon))$, $B = (\frac{n-2}{2})^2 - c(1 - \epsilon)$ ve $C = -c(1 - \epsilon)$ dir. (5.19) denkleminde, eşitliğin sağında bulunan birinci, üçüncü ve dördüncü integraller sonlu değere sahiptir. Böylece, $\tilde{C} > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2} |\phi|^2 dv = n\omega_n B \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + \tilde{C} \tag{5.20}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, $\sinh \rho \geq \rho$ bağıntısı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\phi|^2 dv &= \int_{\mathbf{B}_\epsilon} \epsilon^{-n} \rho^2 dv + \int_{\mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_\epsilon} \rho^{2-n} dv + \int_{\mathbf{B}_2 \setminus \mathbf{B}_1} (2-\rho)^2 dv \\
&\geq n\omega_n \int_\epsilon^1 \rho^{2-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\geq n\omega_n \int_\epsilon^1 \rho d\rho \\
&= n\omega_n \frac{1-\epsilon^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

integrali alttan sınırlanabilir. (5.20) ve (5.21) denklemleri Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_{\Omega} \frac{c(1-\epsilon)}{\rho^2} |\phi|^2 dv}{\int_{\Omega} \phi^2 dv} \\
&\leq \frac{n\omega_n \left(\left((\frac{n-2}{2})^2 - c(1-\epsilon) \right) \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right) + \tilde{C}}{n\omega_n \frac{1-\epsilon^2}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(\frac{n-2}{2})^2 - c < 0$ ve $\rho \in [0, 1]$ için $\rho \leq \sinh \rho \leq 2\rho$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho = +\infty$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece, yeterince küçük $\epsilon > 0$ için,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})} \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_\Omega \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2} |\phi|^2 dv}{\int_\Omega |\phi|^2 dv} = -\infty$$

bulunur. Sonuç 5.1 in ispatı böylece tamamlanmış olur.

Şimdi ise, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere, $V_H = \frac{c}{\rho^2}$ Hardy potansiyelini $V_{\text{osc}} = \frac{\beta}{\rho^2} \sin(\frac{1}{\rho^\alpha})$ salınımlı potansiyeli ile pertürbe edelim. Bu potansiyel, işaret değiştiren potansiyelin en somut örneğidir. Salınım yapan potansiyelin çok geniş pozitif ve negatif kısımları vardır. Çokça salınım yaptığından, kuadratik formda pozitif ve negatif kısımlarda sadeleşme gerçekleşmektedir. Böylece, pozitif çözümlerin yokluğunun yalnızca c sabitine bağlı olduğu sonucu bulunmuştur.

Sonuç 5.2. $n \geq 3$ ve $0 \in \Omega$ olmak üzere Ω , $\mathbb{H}^n$ üzerinde $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $C_H = (\frac{n-2}{2})^2$ ve $c > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $V = \frac{c}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} \sin(\frac{1}{\rho^\alpha})$ olsun. Eğer $c > C_H$ ve $\frac{n-2}{n} \leq m < 1$ ise, (5.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\}$ dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Sonuç 5.1 de kullanılmış olan test fonksiyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{inf}} &:= \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_\Omega (1-\epsilon) \left(\frac{c}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \right) \phi^2 dv}{\int_\Omega \phi^2 dv} \\ &= -\infty \end{aligned} \quad (5.22)$$

olduğu gösterilecektir. İlgili integrallerin çoğu Sonuç 5.1 de hesaplanmıştır. $\tilde{C} > 0$ ve $B = (\frac{n-2}{2})^2 - c(1-\epsilon)$ olmak üzere,

$$\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_\Omega \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2} |\phi|^2 dv = n\omega_n B \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + \tilde{C} \quad (5.23)$$

ve

$$\int_\Omega |\phi|^2 dv \geq n\omega_n \frac{1-\epsilon^2}{2} \quad (5.24)$$

olduğu önceki ispatta hesaplanmıştır. Şimdi ise hesaplanması gereken,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\beta}{\rho^2} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \phi^2 dv = \beta n\omega_n \left[\int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right. \\ &\quad + \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &\quad \left. + \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^2 (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right] \end{aligned}$$

integralidir.

$$\begin{aligned} A &= \epsilon^{-n} \int_0^\epsilon (\sin \rho^{-\alpha})(\sinh \rho)^{n-1} d\rho, \\ B &= \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sin \rho^{-\alpha})(\sinh \rho)^{n-1} d\rho, \\ C &= \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)^2 (\sin \rho^{-\alpha})(\sinh \rho)^{n-1} d\rho \end{aligned}$$

olsun. O halde

$$|I| \leq \beta n \omega_n (|A| + |B| + |C|) \quad (5.25)$$

olacaktır. Şimdi sırasıyla A , B ve C integrallerinin yakınsak oldukları gösterilmelidir.

$\rho^{-\alpha} = s$ ve $d\rho = -\frac{1}{\alpha} s^{\frac{-1-\alpha}{\alpha}} ds$ değişken dönüşümü uygulanıp, $\rho < \sinh \rho < 2\rho$ bağıntısı kullanılırsa $(\rho^{n-1} < (\sinh \rho)^{n-1} < (2\rho)^{n-1})$, $n \geq 3$ ve $\alpha > 0$ için, A integrali

$$\begin{aligned} |A| &\leq \epsilon^{-n} 2^{n-1} \int_\infty^{\epsilon^{-\alpha}} s^{\frac{1-n}{\alpha}} \sin s \left(-\frac{1}{\alpha}\right) s^{\frac{-1-\alpha}{\alpha}} ds \\ &= \frac{\epsilon^{-n} 2^{n-1}}{\alpha} \int_{\epsilon^{-\alpha}}^\infty s^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}} \sin s ds \end{aligned} \quad (5.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g_1(s) = s^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}}$ olsun. Bu fonksiyon için $0 < g_1(s) \in C[\epsilon^{-\alpha}, \infty]$ ve azalan olduğu açıktır. Şimdi, $R \gg \epsilon^{-\alpha}$ verilsin. O halde, m ve n tek bir değer alabilen pozitif tamsayılar olduğunda, $m(n-1)\pi \leq \epsilon^{-\alpha} < m\pi < n\pi < R \leq (n+1)\pi$ olur. O halde A integrali

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon^{-\alpha}}^R g_1(s) \sin s ds &= \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} g_1(s) \sin s ds + \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \\ &\quad + \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklinde yazılabilir. (5.27) ifadesinin sağ tarafındaki en son integrali ele alalım. m değeri sabit kaldığında, R ve dolayısıyla n değerleri sonsuz olsun. $g_1(x)$ fonksiyonu azalan olduğundan maksimum değerini $[n\pi, R]$ aralığında $s = n\pi$ de alır: $g_1(n\pi)$. Ayrıca $R \leq (n+1)\pi$ olduğundan aralık genişletilebilir ve

$$\left| \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \right| \leq g_1(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin s| ds$$

yazılabilir. Sağ taraftaki integralin değeri 2 olduğundan

$$\left| \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \right| \leq g_1(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin s| ds = 2g_1(n\pi) \rightarrow 0$$

olur ve $\lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s) = 0$ olduğundan,

$$\int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \longrightarrow 0$$

bulunur. Şimdi $\sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds$ toplamının yakınsadığını göstermeliyiz. $\sin(s)$ fonksiyonunun $k\pi \leq s \leq (k+1)\pi$ aralığında işaret değiştirmediğini biliyoruz.

$$b_k = \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) |\sin s| ds$$

diyelim. Açıkça,

$$g_1((k+1)\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s| ds \leq b_k \leq g_1(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s| ds$$

yazılabilir. Böylece $2g_1(k\pi) \leq b_{k-1} \leq 2g_1((k+1)\pi)$ olduğu görülür. Bu eşitsizliklerden $0 \leq b_k \leq b_{k-1} \leq 2g_1((k+1)\pi)$ sonucuna varılır. Dolayısıyla b_k artmayan bir dizidir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Alterne seriler üzerine Leibniz teoreminden,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k b_k$$

serisi yakınsaktır ve

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| \leq 2g_1(m\pi),$$

yazılır. $g_1(m\pi) \leq g_1(\epsilon^{-\alpha})$ olduğu bilindiğinden,

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| \leq 2g_1(\epsilon^{-\alpha}) = 2(\epsilon^{-\alpha})^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}} = 2\epsilon^{n+\alpha} \quad (5.28)$$

bulunur. Şimdi, (5.27) denkleminin sağındaki ilk integral terimi için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} g_1(s) \sin s ds \right| &\leq g_1(\epsilon^{-\alpha}) \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} |\sin s| ds \leq g_1(\epsilon^{-\alpha}) \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\sin s| ds \\ &= 2g_1(\epsilon^{-\alpha}) = 2\epsilon^{n+\alpha} \end{aligned} \quad (5.29)$$

şeklinde hesaplama yapılabilir. (5.28) ve (5.29) kullanılarak, A integrali için,

$$\epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{için} \quad A \leq \frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha}(1 + o(1)) \quad (5.30)$$

bulunur.

B integralinin hesaplanması için değişken dönüşümü ile

$$B = \frac{2^{n-1}}{\alpha} \int_1^{\epsilon^{-\alpha}} s^{-1} \sin s ds$$

yazılsın. Burada $g_2(s) = s^{-1}$ olsun. Bu fonksiyon, $0 \leq g_2(s) \in C[1, \epsilon^{-\alpha}]$ aralığında tanımlı, pozitif ve azalan bir fonksiyondur. O halde A integralinde olduğu gibi n , $n\pi < \epsilon^{-\alpha} \leq (n+1)\pi$ olmak üzere, B integralini

$$B = \frac{2^{n-1}}{\alpha} \left[\int_1^\pi g_2(s) \sin s ds + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_2(s) \sin s ds + \int_{n\pi}^{\epsilon^{-\alpha}} g_2(s) \sin s ds \right] \quad (5.31)$$

şeklinde yazabiliriz. (5.31) integralindeki ikinci terim alterne seri olduğundan, alterne seri kriteri kullanılarak,

$$\epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{için} \quad |B| \leq \frac{2^n}{\alpha}(1 + o(1)) \quad (5.32)$$

elde edilir.

Son olarak, $\rho^{n-1} \leq (\sinh \rho)^{n-1} \leq (2\rho)^{n-1}$ bağıntısını da kullanarak,

$$\begin{aligned} C &= \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^2 \sin \rho^{-\alpha} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \leq 2^{n-1} \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^2 \sin \rho^{-\alpha} \rho^{n-1} d\rho \\ &= 2^{n-1} \left[4 \int_1^2 \rho^{n-3} \sin \rho^{-\alpha} d\rho - 4 \int_1^2 \rho^{n-2} \sin \rho^{-\alpha} d\rho + \int_1^2 \rho^{n-1} \sin \rho^{-\alpha} d\rho \right] \end{aligned}$$

integrali için bir üst sınır,

$$|C| \leq 2^{n-1} [4(2^{n-3}) + 4(2^{n-2}) + 2^{n-1}] = 2^{2n} \quad (5.33)$$

şeklinde bulunur. (5.30), (5.32) ve (5.33) sonuçları (5.25) ifadesinde yerine yazıldığında,

$\epsilon \rightarrow 0^+$ için,

$$I \leq w_n n \left[\frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{2^n}{\alpha} + 2^{2n} \right] (1 + o(1)) \quad (5.34)$$

olarak bulunur. Son olarak, (5.23), (5.24) ve (5.34) denklemlerinde elde edilen ifadeler (5.22) de verilen Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\tilde{C}_1 = \left(nw_n \left[\frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{2^n}{\alpha} + 2^{2n} \right] (1 + 0(1)) \right)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{R} \leq \frac{n\omega_n \left(\left(\frac{n-2}{2} \right)^2 - c(1-\epsilon) \right) \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + \tilde{C} - \beta \tilde{C}_1}{n\omega_n \frac{2}{1-\epsilon^2}} \quad (5.35)$$

olduğu görülür. $\epsilon \rightarrow 0^+$ için limit alındığında (5.35) ifadesinin sağ tarafı negatif olur ve büyür. Yani

$$\begin{aligned} \sigma_{\inf} &= \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_\Omega (1-\epsilon) \left(\frac{c}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho^2} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \right) \phi^2 dv}{\int_\Omega \phi^2 dv} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

olur. Sonuç 5.2 ispatı böylece tamamlanmış olur.

Son olarak hem orijinde hem de $\partial \mathbf{B}_1$ sınırında singüleriteye sahip $V_L = \frac{c}{\rho^2 (\ln \frac{1}{\rho})^2}$ Leray potansiyeli ele alınacaktır. Bu potansiyel yedinci bölümde elde edilen Sonuç (7.2) de $p = 2$ alındığında elde edilmektedir.

Sonuç 5.3. $n \geq 3$ olmak üzere, $\mathbf{B}_1, \mathbb{H}^n$ üzerinde birim hiperbolik yuvar olmak üzere, $C_L = \frac{1}{4}$, $V = \frac{c}{\rho^2 (\ln \frac{1}{\rho})^2}$ ve $c > 0$ olsun. O halde, $c > C_L$ ve $\frac{n-2}{n} \leq m < 1$ olduğunda, (5.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\} \cup \partial \mathbf{B}_1$ in dışında kalan pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. $\epsilon > 0$ olmak üzere, radyal $\phi(x) = \varphi(\rho)$ fonksiyonu,

$$\phi(x) = \varphi(\rho) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{e}, \\ \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\frac{1+\epsilon}{2}} & , \quad \frac{1}{e} \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde $\varphi(x)$ fonksiyonunun türevi,

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi(x)|^2 = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < \rho < \frac{1}{e}, \\ \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right)^2 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \frac{1}{\rho^2} & , \quad \frac{1}{e} < \rho < 1 \end{cases} \quad (5.36)$$

olduğu kolayca görülür. (5.36) ifadesi $\mathbf{B}_1$ üzerinde integre edildiğinde,

$$\int_{\mathbf{B}_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv = nw_n \left(\frac{1+\epsilon}{2} \right)^2 \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \frac{1}{\rho^2} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \quad (5.37)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}_1} \frac{c}{\rho^2 (\ln \frac{1}{\rho})^2} |\phi|^2 dv &= n w_n c \int_0^{\frac{1}{e}} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{-2} \frac{1}{\rho^2} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &+ n w_n c \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \frac{1}{\rho^2} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \end{aligned} \quad (5.38)$$

olduğu açıktır. (5.38) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integral yakınsak olduğundan, $C_1 > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbf{B}_1} \frac{c}{\rho^2 (\ln \frac{1}{\rho})^2} |\phi|^2 dv = n w_n c \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \frac{1}{\rho^2} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + C_1 \quad (5.39)$$

yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}_1} |\phi|^2 dv &= \int_{\mathbf{B}_{\frac{1}{e}}} dv + \int_{\mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_{\frac{1}{e}}} \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon+1} dv \\ &\geq \text{Vol}(\mathbf{B}_{\frac{1}{e}}) = C_2 > 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

integralinin de yakınsak olduğu görülmektedir.

(5.37), (5.39) ve (5.40) integralleri Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{\int_{\mathbf{B}_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^2 dv - \int_{\mathbf{B}_1} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^2 (\ln \frac{1}{\rho})^2} |\phi|^2 dv}{\int_{\mathbf{B}_1} |\phi|^2 dv} \\ &\leq \frac{n w_n \left(\left(\frac{1+\epsilon}{2} \right)^2 - c + c\epsilon \right) \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \frac{1}{\rho^2} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + C_1}{C_2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

bulunur. (5.41) ifadesindeki integralde $\rho \in [0, 1]$ için $\rho \leq \sinh \rho \leq 2\rho$ olduğundan, $z = \ln(\frac{1}{\rho})$ değişken dönüşümü ile

$$I := \int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\epsilon-1} \rho^{n-3} d\rho = \int_0^1 z^{\epsilon-1} e^{(2-n)z} dz$$

olur. Burada $\epsilon \rightarrow 0$ için

$$I \geq \frac{e^{2-n}}{\epsilon} \rightarrow \infty$$

elde edilir. Yeterince küçük $\epsilon > 0$ için $\left(\frac{1+\epsilon}{2} \right)^2 - c + c\epsilon < 0$ olduğundan,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R} = -\infty$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

6. p -LAPLASYAN TİPİ DENKLEM ve UYGULAMALARI

6.1. p -Laplasyan Tipi Denklem

Bu bölümde aşağıda verilen lineer olmayan parabolik kısmi diferansiyel denklemin kompakt olmayan M Riemann manifoldu üzerinde pozitif çözümlerinin yokluğu incelenecektir.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{p,g} u + V(x)u^{p-1} + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (6.1)$$

Burada Ω bölgesi, M de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, $1 < p < 2$, $V \in L^1_{loc}(\Omega)$, $q > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ve $\Delta_{p,g}$, M üzerinde p -Laplasyan operatörüdür.

Pozitif çözümler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Tanım 6.1.1. $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan, *sürekli yerel pozitif u çözümleri* aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

- (i) $\mathcal{K}$, Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kapalı bir alt küme,
- (ii) $u : [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$ fonksiyonu, bazı $T > 0$ değerleri için sürekli,
- (iii) $(x, t) \rightarrow u(x, t) \in C((\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T))$,
- (iv) $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde $u(x, t) > 0$,
- (v) $\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = u_0$,
- (vi) u , (6.1) denkleminin çözümü olmak üzere, $\nabla u \in L^2_{loc}(\Omega \setminus \mathcal{K})$.

Uyarı 6.1. Eğer, $0 < a < b < T$ ve $\mathcal{K}_o$, $\Omega \setminus \mathcal{K}$ bölgesinin kompakt bir alt kümesi ise, bazı $\epsilon_1 > 0$ ve $(x, t) \in \mathcal{K}_o \times [a, b]$ için $u(x, t) \geq \epsilon_1 > 0$ olur. (iii) ve (iv) ifadeleri şu şekilde zayıflatılabilir:

- (iii)' $u(x, t)$ pozitif ve $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde yerel olarak sınırlı,
- (iv)' $\frac{1}{u(x, t)}$, $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesi üzerinde yerel olarak sınırlıdır.

Eğer u çözümü (i), (ii), (iii)', (iv)', (v), ve (vi) ifadelerini sağlıyorsa, $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan *genelleştirilmiş yerel pozitif çözüm* olarak adlandırılır. Bu ifade, $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan, yerel pozitif sürekli çözümlerden daha geneldir. Eğer $\mathcal{K} = \emptyset$ ise, u çözümü basitçe, *genelleştirilmiş pozitif yerel çözüm* olarak adlandırılır.

Bu bölümün ana teoremini vermeden önce, teoremin ispatında kullanılacak olan önerme ispatı ile verilecektir. Bu önermenin ispatında Hölder ve Sobolev eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Önerme 6.1. M , boyutu $n \geq 2$ olan tam, kompakt olmayan bir Riemann manifoldu ve Ω bölgesi, M de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olsun. $a(x) \in L^{\frac{n}{p}}(\Omega)$, $1 < p < n$ ve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere, her $\epsilon > 0$ için,

$$\left| \int_{\Omega} a(x) |\phi|^p dv_g \right| \leq \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g \quad (6.2)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $C(\epsilon, a)$ pozitif sayısı vardır.

Kanıt. Hemen hemen her $x \in \Omega$ ve $k \geq 1$ için $(a_k)_{k \geq 1}$ dizisi $a_k(x) := \min \{a(x), k\}$ olarak tanımlansın. O halde,

$$k \longrightarrow \infty \quad \text{için} \quad \|a_k(x) - a(x)\|_{L^p} \longrightarrow 0 \quad (6.3)$$

olduğu görülebilir. Bu durumda,

$$\left| \int_{\Omega} a(x) |\phi|^p dv_g \right| \leq \int_{\Omega} |a - a_k| |\phi|^p dv_g + k \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g. \quad (6.4)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (6.4) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime, $\frac{n}{n-p}$ ve $\frac{n}{p}$ eşlenik kuvvetlerle Hölder eşitsizliği uygulandığında,

$$\left| \int_{\Omega} a |\phi|^p dv_g \right| \leq \left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{p}} dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^{\frac{np}{n-p}} dv_g \right)^{\frac{n-p}{n}} + k \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g.$$

ifadesi elde edilir. Burada Ω bölgesi sınırlı olduğundan, (3.5) denkleminde verilen Sobolev eşitsizliği bu bölgede geçerlidir. Böylece,

$$\left| \int_{\Omega} a |\phi|^p dv_g \right| \leq \left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{p}} dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \left(C_M^p \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \right) + k \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g$$

yazılabilir. (6.3) ile ifade edilen limit sayesinde, verilen her $\epsilon \in (0, 1)$ için,

$$\left(\int_{\Omega} |a - a_k|^{\frac{n}{p}} dv_g \right)^{\frac{p}{n}} \leq \frac{\epsilon}{2(1 - \epsilon)C_M^p}.$$

eşitsizliğini sağlayan $k(\epsilon) \geq 1$ ve bir $C > 0$ sabiti vardır. Son olarak $k = k(\epsilon)$ alınması ile istenilen (6.2) eşitsizliği elde edilir.

Şimdi bu bölümün ana teoremi ispatı ile verilecektir.

Teorem 6.1. M , boyutu $n \geq 2$ olan tam, kompakt olmayan bir Riemann manifoldu ve Ω bölgesi, M de düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge olmak üzere, $\frac{2n}{n+1} \leq p < 2$, $p - 1 < q < p + \frac{p-n}{n}$ ve $V(x) \in L_{loc}^1(\Omega \setminus \mathcal{K})$ olsun. Burada $\mathcal{K}$, Ω bölgesinde Lebesgue ölçümü sıfır olan kapalı bir alt kümedir. Verilen $\epsilon > 0$ için, eğer

$$\sigma_{inf}^p := \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g - \int_{\Omega} (1 - \epsilon)V|\phi|^p dv_g}{\int_{\Omega} |\phi|^p dv_g} = -\infty \quad (6.5)$$

ise, (6.1) probleminin $\mathcal{K}$ 'nin dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Herhangi $T > 0$ için, $u : [0, T) \rightarrow L^1(\Omega)$, $(\Omega \setminus \mathcal{K}) \times (0, T)$ bölgesinde, $u_0 \geq 0$ fakat sıfıra eşit olmayan, (6.1) probleminin bir genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü olsun.

(6.1) denkleminin her iki tarafı, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})$ olmak üzere, ϕ^p/u^{p-1} test fonksiyonu ile çarpılıp Ω üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{2-p} |\phi|^p dv_g &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_g (|\nabla_g u|^{p-2} \nabla_g u) \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} dv_g \\ &\quad + \int_{\Omega} V(x) |\phi|^p dv_g + \int_{\Omega} \lambda u^{q-p+1} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (6.6)$$

elde edilir. Diverjans teoremi yardımıyla,

$$A := \int_{\Omega} \operatorname{div}_g (|\nabla_g u|^{p-2} \nabla_g u) \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} dv_g = - \int_{\Omega} |\nabla_g u|^{p-2} \langle \nabla_g u, \nabla_g \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) \rangle dv_g \quad (6.7)$$

bulunur. (6.7) eşitliğinin sağ tarafının

$$\begin{aligned} -|\nabla_g u|^{p-2} \langle \nabla_g u, \nabla_g \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) \rangle &= -p |\nabla_g u|^{p-2} \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} \langle \nabla_g u, \nabla_g |\phi| \rangle \\ &\quad + (p-1) \frac{|\phi|^p}{u^p} |\nabla_g u|^p \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Böylece

$$B := \int_{\Omega} \left((p-1) |\nabla_g u|^p \frac{|\phi|^p}{u^p} - p |\nabla_g u|^{p-1} \frac{|\phi|^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla_g \phi| \right) dv_g \quad (6.8)$$

olmak üzere,

$$A = \int_{\Omega} \operatorname{div}_g (|\nabla_g u|^{p-2} \nabla_g u) \frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} dv_g \geq B \quad (6.9)$$

elde edilmektedir.

Burada, $p > 1$ ve $\omega_1 \neq \omega_2$ iki pozitif reel sayı olsun olmak üzere

$$\omega_1^p - \omega_2^p - p\omega_2^{p-1}(\omega_1 - \omega_2) > 0$$

elemanter eşitsizliğini kullanalım. Bu eşitsizlik,

$$(p-1)w_2^p - pw_2^{p-1}w_1 > -w_1^p$$

olarak da yazılabilir. Burada, $w_2 = \frac{|\phi|}{u} |\nabla_g u|$ ve $w_1 = |\nabla_g \phi|$ alınarak, (6.8) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$B \geq - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \quad (6.10)$$

elde edilir. (6.10) ifadesi (6.9) de yerine yazıldığında

$$A = \int_{\Omega} \operatorname{div}_g (|\nabla_g u|^{p-2} \nabla_g u) \left(\frac{|\phi|^p}{u^{p-1}} \right) dv_g \geq - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \quad (6.11)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiği görülür. (6.11) eşitsizliği (6.6) eşitliğinde yerine yazılarak, t_1 den t_2 ye ($0 < t_1 < t_2 < T$) integre edildiğinde,

$$L = \frac{1}{(2-p)(t_2 - t_1)} \int_{\Omega} (u^{2-p}(x, t_2) - u^{2-p}(x, t_1)) |\phi|^p dv_g$$

ve

$$R = -\lambda \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} u^{q-p+1} |\phi|^p dt dv_g$$

olmak üzere,

$$\int_{\Omega} V(x) |\phi|^p dv_g - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \leq L + R, \quad (6.12)$$

eşitsizliği bulunur. Konkav fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği kullanılarak, $\frac{2n}{n+1} \leq p < 2$ olduğundan,

$$\int_{\Omega} (u(x, t_i))^{\frac{(2-p)n}{p}} dv_g \leq C(\text{Vol}(\Omega)) \int_{\Omega} (u(x, t_i) dv_g)^{\frac{(2-p)n}{p}} < \infty$$

elde edilir. O halde

$$u^{2-p}(x, t_i) \in L^{\frac{n}{p}}(\Omega)$$

sonucuna varılır. (6.12) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci integrale,

$$F(x) := -\lambda \int_{t_1}^{t_2} u^{q-p+1} dt$$

diyelim. Bu ifadeye Jensen eşitsizliği uygulandığında,

$$F(x, t) \in L^{\frac{n}{p}}(\Omega)$$

olduğu görülür. Önerme (3.5) yardımıyla,

$$\begin{aligned} R &\leq \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g \\ &= \frac{\epsilon}{(1-\epsilon)} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (6.13)$$

sonucuna ulaşılır. (6.13) ifadesi (6.2) da yerine yazıldığında

$$\int_{\Omega} V(x) |\phi|^p dv_g - \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \leq \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + C(\epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^p dv_g$$

olur. O halde,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g - \int_{\Omega} (1-\epsilon) V(x) |\phi|^p dv_g}{\int_{\Omega} |\phi|^p dv_g} \geq -(1-\epsilon) C(\epsilon) > -\infty$$

sonucuna varılır. Bu ise Teorem (6.1) de verilen varsayımlar ile çelişir. O halde, istenen koşullar altında (6.1) probleminin pozitif bir çözümü yoktur.

Uyarı 6.2. (6.1) probleminin pozitif çözümlerinin varlığının varsayımı,

$$\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv \geq (1-\epsilon) \int_{\Omega} V(x) |\phi|^p dv - (1-\epsilon) C(\epsilon, a, \lambda, q, \text{Vol}(\Omega)) \int_{\Omega} |\phi|^p dv.$$

şeklinde Hardy tipi bir eşitsizliğin varlığını gerektirmektedir. Böyle bir eşitsizlik yoksa, pozitif bir çözüm yoktur.

6.2. Teorem 6.1'in Uygulamaları

Bu alt bölümde Teorem 6.1'in uygulamaları için bazı somut potansiyeller ele alınacak ve problemin pozitif çözümünün yokluğunun Hardy eşitsizliği ile ilişkisi gösterilecektir. Aşağıda verilen ilk sonuçta, $V(\rho) = \frac{c}{\rho^p}$ Hardy potansiyeli ele alınmıştır.

Sonuç 6.1. $n \geq 2$ ve $0 \in \Omega$ olmak üzere, Ω bölgesi, $\mathbb{H}^n$ üzerinde $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $H_p = (\frac{n-p}{p})^p$ ve $V(\rho) = \frac{c}{\rho^p}$ ($\rho = \log(\frac{1+|x|}{1-|x|})$) olsun. Eğer $c > H_p$ ve $\frac{2n}{n+1} \leq p < 2$ ise, (6.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\}$ dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Verilen $\epsilon > 0$ için, $\phi(x) = \varphi(\rho)$ radyal fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\phi(x) = \varphi(\rho) = \begin{cases} \epsilon^{\frac{-n}{p}} \rho & , \quad 0 \leq \rho \leq \epsilon, \\ \rho^{-\left(\frac{n-p}{p}\right)} & , \quad \epsilon \leq \rho \leq 1, \\ 2 - \rho & , \quad 1 \leq \rho \leq 2, \\ 0 & , \quad \rho \geq 2. \end{cases} \quad (6.14)$$

O halde türevi,

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p = \begin{cases} \epsilon^{-n} & , \quad 0 < \rho < \epsilon, \\ \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \rho^{-n} & , \quad \epsilon < \rho < 1, \\ 1 & , \quad 1 < \rho < 2, \\ 0 & , \quad \rho > 2 \end{cases} \quad (6.15)$$

şeklinde. Genelliği bozmadan, $B_2 = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \rho < 2\} \subset \Omega$ olduğunu varsayalım. Aksi halde, (6.14) ile tanımlı ϕ fonksiyonunun son iki satırındaki 2 yerine R yazılarak $B_R \subset \Omega$ olacak şekilde yeniden tanımlansın. Bu durumda, aşağıda verilen ispatta yalnızca notasyonel değişiklikler olacaktır.

Göstermemiz gereken

$$\sigma_{inf} := \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p} |\phi|^p dv}{\int_{\Omega} |\phi|^p dv} \quad (6.16)$$

ifadesinin $-\infty$ olduğudur. (6.15) ile verilen fonksiyonun integralinin

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &= n\omega_n \int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad + n\omega_n \int_\epsilon^1 \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad + n\omega_n \int_1^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho
\end{aligned} \tag{6.17}$$

olduğu kolayca görülebilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
(1-\epsilon)c \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dv &= c(1-\epsilon)n\omega_n \left(\int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right. \\
&\quad + \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad \left. + \int_1^2 \left(\frac{2-\rho}{\rho}\right)^p (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

olarak hesaplanır. (6.17) ve (6.18) denklemlerinden (6.16) ifadesinin payında bulunan ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p} |\phi|^p dv &= n\omega_n A \int_0^\epsilon (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad + n\omega_n B \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad + n\omega_n \int_1^2 (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\quad + n\omega_n C \int_1^2 \left(\frac{2-\rho}{\rho}\right)^p (\sinh \rho)^{n-1} d\rho.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Burada $A = \epsilon^{-n}(1 - c(1 - \epsilon))$, $B = \left(\frac{n-p}{p}\right)^p - c(1 - \epsilon)$ ve $C = -c(1 - \epsilon)$ dur. (6.19) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci, üçüncü ve dördüncü integrallerin sonlu olduğu açıktır. Böylece, $\tilde{C}$ pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p} |\phi|^p dv = n\omega_n B \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + \tilde{C} \tag{6.20}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, (6.16) ifadesinin paydasındaki integral,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\phi|^p dv &= \int_{B_\epsilon} \epsilon^{-n} \rho^p dv + \int_{B_1 \setminus B_\epsilon} \rho^{p-n} dv + \int_{B_2 \setminus B_1} (2-\rho)^p dv \\
&\geq n\omega_n \int_\epsilon^1 \rho^{p-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\
&\geq n\omega_n \int_\epsilon^1 \rho^{p-1} d\rho \\
&= n\omega_n \frac{1 - \epsilon^p}{p}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

olarak hesaplanır. (6.20) ve (6.21) ifadeleri (6.16) denklemi ile verilen Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{c(1-\epsilon)}{\rho^p} |\phi|^p dv}{\int_{\Omega} \phi^p dv} \\ &\leq \frac{n\omega_n \left(\left(\frac{n-p}{p} \right)^p - c(1-\epsilon) \right) \int_{\epsilon}^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho}{n\omega_n \frac{1-\epsilon^p}{p}} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

elde edilir. $\rho \in [0, 1]$ için $\rho \leq \sinh \rho \leq 2\rho$ ilişkisi kullanıldığında

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho = +\infty$$

bulunur. $\left(\frac{n-p}{p} \right)^p - c(1-\epsilon) < 0$ olduğundan, yeterince küçük $\epsilon > 0$ için,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p} |\phi|^p dv}{\int_{\Omega} |\phi|^p dv} = -\infty$$

sonucuna ulaşılır. Sonuç 6.1 in ispatı böylece tamamlanmış olur.

Şimdi ise, $V(\rho) = \frac{c}{\rho^p} + \frac{\beta}{\rho^p} \sin(\frac{1}{\rho^\alpha})$ salınımlı potansiyeli ele alınarak Teorem 6.1'in pozitif çözümünün yokluğu gösterilecektir.

Sonuç 6.2. $n \geq 2$ ve $0 \in \Omega$ olmak üzere, $\Omega, \mathbb{H}^n$ üzerinde düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $H_p = \left(\frac{n-p}{p} \right)^p$, $V(\rho) = \frac{c}{\rho^p} + \frac{\beta}{\rho^p} \sin(\frac{1}{\rho^\alpha})$ ($\rho = \log(\frac{1+|x|}{1-|x|})$), $c > 0$, $\alpha > 0$ ve $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olsun. Eğer, $c > H_p$ ve $\frac{2n}{n+1} \leq p < 2$ ise, (6.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\}$ nın dışında kalan genelleştirilmiş yerel pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. Sonuç 6.1 de kullanılmış olan test fonksiyonu kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sigma_{\inf}((1-\epsilon)V; \Omega) &= \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} (1-\epsilon) \left(\frac{c}{\rho^p} + \frac{\beta}{\rho^p} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \right) \phi^p dv}{\int_{\Omega} \phi^p dv} \\ &= -\infty\end{aligned}\tag{6.22}$$

olduğu gösterilecektir. İlgili integrallerin çoğu Sonuç 6.1'de hesaplanmıştır. $\tilde{C} > 0$ ve $B = \left(\frac{n-p}{p} \right)^p - c(1-\epsilon)$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\Omega} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p} |\phi|^p dv = n\omega_n B \int_{\epsilon}^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + \tilde{C}\tag{6.23}$$

ve

$$\int_{\Omega} |\phi|^p dv \geq n\omega_n \frac{1 - \epsilon^p}{p} \quad (6.24)$$

olduğu önceki ispatta hesaplanmıştır. Şimdi ise hesaplanması gereken,

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} \frac{\beta}{\rho^p} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \phi^p dv &= \beta n \omega_n \left[\int_0^\epsilon \epsilon^{-n} (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right. \\ &\quad + \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &\quad \left. + \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^p (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right] \end{aligned} \quad (6.25)$$

integralidir.

$$\begin{aligned} A &= \epsilon^{-n} \int_0^\epsilon (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho, \\ B &= \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho, \\ C &= \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^p (\sin \rho^{-\alpha}) (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$|I| \leq \beta n \omega_n (|A| + |B| + |C|) \quad (6.26)$$

olarak tanımlansın. Şimdi sırasıyla A , B ve C integrallerinin yakınsak oldukları gösterilmelidir.

$\rho^{-\alpha} = s$ ve $d\rho = -\frac{1}{\alpha} s^{\frac{-1-\alpha}{\alpha}} ds$ değişken dönüşümü uygulanıp, $\rho < \sinh \rho < 2\rho$ bağıntısı kullanılırsa $(\rho^{n-1} < (\sinh \rho)^{n-1} < (2\rho)^{n-1})$, $n \geq 3$ ve $\alpha > 0$ için, A integrali

$$\begin{aligned} |A| &\leq \epsilon^{-n} 2^{n-1} \int_\infty^{\epsilon^{-\alpha}} s^{\frac{1-n}{\alpha}} \sin s \left(-\frac{1}{\alpha} \right) s^{\frac{-1-\alpha}{\alpha}} ds \\ &= \frac{\epsilon^{-n} 2^{n-1}}{\alpha} \int_{\epsilon^{-\alpha}}^\infty s^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}} \sin s ds \end{aligned} \quad (6.27)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g_1(s) = s^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}}$ olsun. Bu fonksiyon için $0 < g_1(s) \in C[\epsilon^{-\alpha}, \infty]$ ve azalan olduğu açıktır. Şimdi, $R \gg \epsilon^{-\alpha}$ verilsin. O halde, m ve n tek bir değer alabilen pozitif tamsayılar olduğunda, $m(n-1)\pi \leq \epsilon^{-\alpha} < m\pi < n\pi < R \leq (n+1)\pi$ olur. O halde A integrali

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon^{-\alpha}}^R g_1(s) \sin s ds &= \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} g_1(s) \sin s ds + \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \\ &\quad + \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \end{aligned} \quad (6.28)$$

olur. (6.28) eşitliğinin sağ tarafındaki en son integrali ele alalım. m değeri sabit kaldığında, R ve dolayısıyla n değerleri sonsuz olsun. $g_1(x)$ fonksiyonu azalan olduğundan maksimum değerini $[n\pi, R]$ aralığında $s = n\pi$ de alır: $g_1(n\pi)$. Ayrıca $R \leq (n+1)\pi$ olduğundan aralık genişletilebilir ve

$$\left| \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \right| \leq g_1(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin s| ds$$

yazılabilir. Sağ taraftaki integralin değeri 2 olduğundan

$$\left| \int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \right| \leq g_1(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin s| ds = 2g_1(n\pi) \rightarrow 0$$

olur ve $\lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s) = 0$ olduğundan,

$$\int_{n\pi}^R g_1(s) \sin s ds \rightarrow 0$$

bulunur. Şimdi $\sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds$ toplamının yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $\sin(s)$ fonksiyonunun $k\pi \leq s \leq (k+1)\pi$ aralığında işaret değiştirmediğini biliyoruz.

$$b_k = \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) |\sin s| ds$$

diyelim. Açıkça

$$g_1((k+1)\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s| ds \leq b_k \leq g_1(k\pi) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s| ds$$

yazılabilir ve böylece $2g_1(k\pi) \leq b_{k-1} \leq 2g_1((k+1)\pi)$ olduğu görülür. Bu eşitsizliklerden $0 \leq b_k \leq b_{k-1} \leq 2g_1((k+1)\pi)$ sonucuna varılır. Dolayısıyla b_k artmayan bir dizidir ve $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$. Alterne seriler için Leibniz teoreminden,

$$\sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k b_k$$

serisi yakınsaktır ve

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| \leq 2g_1(m\pi),$$

yazılır. $g_1(m\pi) \leq g_1(\epsilon^{-\alpha})$ olduğu bilindiğinden,

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_1(s) \sin s ds \right| \leq 2g_1(\epsilon^{-\alpha}) = 2(\epsilon^{-\alpha})^{\frac{-n-\alpha}{\alpha}} = 2\epsilon^{n+\alpha} \quad (6.29)$$

bulunur. (6.28) denkleminin sağındaki ilk integral terimi için

$$\begin{aligned} \left| \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} g_1(s) \sin s ds \right| &\leq g_1(\epsilon^{-\alpha}) \int_{\epsilon^{-\alpha}}^{m\pi} |\sin s| ds \leq g_1(\epsilon^{-\alpha}) \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} |\sin s| ds \\ &= 2g_1(\epsilon^{-\alpha}) = 2\epsilon^{n+\alpha} \end{aligned} \quad (6.30)$$

şeklinde hesaplama yapılabilir. (6.29) ve (6.30) kullanılarak, A integrali için,

$$\epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{için} \quad A \leq \frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha} (1 + o(1)) \quad (6.31)$$

bulunur.

Şimdi, B integralinin sonlu olduğunu göstermek için $\rho \leq \sinh \rho \leq 2\rho$ ilişkisi ve değişken dönüşümü kullanılırsa,

$$B \leq \frac{2^{n-1}}{\alpha} \int_1^{\epsilon^{-\alpha}} s^{-1} \sin s ds$$

yazılabilir. Burada $g_2(s) = s^{-1}$ olsun. Bu fonksiyon, $0 \leq g_2(s) \in C[1, \epsilon^{-\alpha}]$ aralığında tanımlı, pozitif ve azalan bir fonksiyondur. O halde A integralinde olduğu gibi n , $n\pi < \epsilon^{-\alpha} \leq (n+1)\pi$ olmak üzere, B integralini

$$\begin{aligned} B = \frac{2^{n-1}}{\alpha} \left[\int_1^{\pi} g_2(s) \sin s ds + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g_2(s) \sin s ds \right. \\ \left. + \int_{n\pi}^{\epsilon^{-\alpha}} g_2(s) \sin s ds \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.32) integralindeki ikinci terim alterne seri olduğundan, alterne seri kriteri kullanılarak,

$$\epsilon \rightarrow 0^+ \quad \text{için} \quad |B| \leq \frac{2^n}{\alpha} (1 + o(1)) \quad (6.33)$$

elde edilir.

Son olarak, $\rho^{n-1} \leq (\sinh \rho)^{n-1} \leq (2\rho)^{n-1}$ ilişkisini kullanarak,

$$\begin{aligned} C &\leq 2^{n-1} \int_1^2 \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)^p \sin(\rho^{-\alpha}) \rho^{n-1} d\rho \\ &= 2^{n-1} \left[4 \int_1^2 \rho^{n-3} \sin(\rho^{-\alpha}) d\rho - 4 \int_1^2 \rho^{n-2} \sin(\rho^{-\alpha}) d\rho + \int_1^2 \rho^{n-1} \sin(\rho^{-\alpha}) d\rho \right] \end{aligned}$$

integrali için bir üst sınır,

$$|C| \leq \frac{2^{n-p} - 1}{n - p} \quad (6.34)$$

olarak bulunur. (6.31), (6.33) ve (6.34) sonuçları (6.26) denkleminde yerine yazıldığında, $\epsilon \rightarrow 0^+$ için,

$$I \leq w_n n \left[\frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{2^n}{\alpha} + \frac{2^{n-p} - 1}{n - p} \right] (1 + 0(1)) \quad (6.35)$$

olarak bulunur. (6.23), (6.24) ve (6.35) denklemlerindeki ifadeler (6.22) ile verilen Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\tilde{C}_1 = \left(n w_n \left[\frac{2^{n+1}\epsilon^\alpha}{\alpha} + \frac{2^n}{\alpha} + \frac{2^{n-p} - 1}{n - p} \right] (1 + 0(1)) \right)$$

olmak üzere,

$$\mathcal{R} \leq \frac{n \omega_n \left(\left(\left(\frac{n-p}{p} \right)^p - c(1 - \epsilon) \right) \int_\epsilon^1 \rho^{-n} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \right) + \tilde{C} - \beta \tilde{C}_1}{n \omega_n \frac{1-\epsilon^p}{p}} \quad (6.36)$$

bulunur. $\epsilon \rightarrow 0^+$ için limit alındığında (6.36) ifadesinin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \sigma_{\inf}((1 - \epsilon)V; \Omega) &= \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{K})} \frac{\int_\Omega |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_\Omega (1 - \epsilon) \left(\frac{c}{\rho^p} + \frac{\beta}{\rho^p} \sin \frac{1}{\rho^\alpha} \right) \phi^p dv}{\int_\Omega \phi^p dv} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç 6.2 ispatı böylece tamamlanmış olur.

Son olarak, (6.1) probleminin pozitif çözümlerinin yokluğunu göstermek için $V(\rho) = \frac{c}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p}$ potansiyeli ele alınacaktır. Bu potansiyel, yedinci bölümde ispatlanan Teorem 7.1 kullanılarak ulaşılan Sonuç 7.2 de elde edilen Leray potansiyelidir.

Sonuç 6.3. $n \geq 2$ olmak üzere, $\mathbf{B}_1$ bölgesi, $\mathbb{H}^n$ 'de birim hiperbolik yuvar,

$V(\rho) = \frac{c}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p}$ ($\rho = \log(\frac{1+|x|}{1-|x|})$) ve $L_p = (\frac{p-1}{p})^p$ olsun. Eğer $c > L_p$ ve $\frac{2n}{n+1} \leq p < 2$ ise, (6.1) probleminin $\mathcal{K} = \{0\} \cup \partial \mathbf{B}_1$ dışında kalan pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. $\phi(x) = \varphi(\rho)$ radyal fonksiyonu, $\epsilon > 0$ için,

$$\phi(x) = \varphi(\rho) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{e} \\ \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^{\left(\frac{p-1}{p} \right)(1+\epsilon)} & , \quad \frac{1}{e} \leq \rho \leq 1, \end{cases} \quad (6.37)$$

olarak tanımlansın. O halde türevi,

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi(x)|^p = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < \rho < \frac{1}{e}, \\ \left(\frac{p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)^p (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \frac{1}{\rho^p} & , \quad \frac{1}{e} < \rho < 1 \end{cases} \quad (6.38)$$

şeklinde hesaplanır. (6.38) türevi, $\mathbf{B}_1$ bölgesi üzerinde integre edildiğinde

$$\int_{\mathbf{B}_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv = nw_n \left(\frac{p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)^p \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \frac{1}{\rho^p} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \quad (6.39)$$

olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}_1} \frac{c}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv &= nw_n c \int_0^{\frac{1}{e}} \left(\ln \frac{1}{\rho}\right)^{-p} \frac{1}{\rho^p} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho \\ &+ nw_n c \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \frac{1}{\rho^p} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho. \end{aligned} \quad (6.40)$$

integrali yazılır. (6.40) ifadesinin sağ tarafındaki ilk integral sonlu olduğundan, $C_1 > 0$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbf{B}_1} \frac{c}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv = nw_n c \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \frac{1}{\rho^p} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + C_1 \quad (6.41)$$

olarak yeniden yazılabilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}_1} |\phi|^p dv &= \int_{\mathbf{B}_{\frac{1}{e}}} dv + \int_{\mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_{\frac{1}{e}}} (\ln \frac{1}{\rho})^{(p-1)(1+\epsilon)} dv \\ &\geq \text{Vol}(\mathbf{B}_{\frac{1}{e}}) = C_2 > 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

integralinin sonlu olduğu da görülmektedir. (6.39), (6.41) ve (6.42) sonuçları Rayleigh oranında yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{\int_{\mathbf{B}_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv - \int_{\mathbf{B}_1} \frac{(1-\epsilon)c}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv}{\int_{\mathbf{B}_1} |\phi|^p dv} \\ &\leq \frac{nw_n \left(\left(\frac{p-1}{p}\right)^p (1+\epsilon)^p - c + c\epsilon \right) \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \frac{1}{\rho^p} (\sinh \rho)^{n-1} d\rho + C_1}{C_2} \end{aligned} \quad (6.43)$$

bulunur. (6.43) ifadesinin payında yer alan integralde $\rho \in [0, 1]$ için $\rho \leq \sinh \rho \leq 2\rho$ olduğundan, $z = \ln(\frac{1}{\rho})$ değişken dönüşümü ile,

$$I := \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln \frac{1}{\rho})^{p\epsilon-1-\epsilon} \rho^{n-p-1} d\rho = \int_0^1 z^{p\epsilon-1-\epsilon} e^{(p-n)z} dz.$$

bulunur. Burada $\epsilon \rightarrow 0$ için limit alındığında,

$$I \geq \frac{e^{p-n}}{p\epsilon - \epsilon} \rightarrow \infty$$

elde edilir. Yeterince küçük $\epsilon > 0$ için $(\frac{p-1}{p})^p(1+\epsilon)^p - c + c\epsilon < 0$ olduğundan,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{R} = -\infty$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

7. GELİŞTİRİLMİŞ HARDY VE LERAY TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Hardy eşitsizliği, spektral teori, harmonik analiz, kısmi diferansiyel denklemler, olasılık teorisi ve geometride önemli rol oynar. Özellikle tekil potansiyeller içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analizinde Hardy eşitsizliği önemli bir araçtır. Çalışmamızı motive etmek için $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayındaki Hardy eşitsizliğini hatırlayarak başlayalım.

Ω , düzgün sınırlı bir bölge ve $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ veya $\Omega = \mathbb{R}^n$ olsun. Bilinen Hardy eşitsizliği, $n \geq 3$ olmak üzere $C_0^\infty(\Omega)$ sınıfından olan ve $n = 1, 2$ için $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ sınıfından olan ϕ fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\Omega} \frac{|\phi|^2}{|x|^2} dx, \quad (7.1)$$

olarak verilmektedir. Bu eşitsizlikteki $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ sabiti en iyi sabittir. Yani, bu sabit daha büyük bir sabit ile değiştirildiğinde (7.1) eşitsizliği geçerliliğini yitirir. Diğer bir ifade ile,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{|\phi|^2}{|x|^2} dx} = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$$

eşitliğinin gerçekleştiği ispatlanmıştır.

(7.1) Hardy eşitsizliğinin L^p versiyonu şu şekildedir: $1 < p < n$ olması durumunda $C_0^\infty(\Omega)$ ve $p \geq n$ durumunda ise $C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\})$ sınıfından olan ϕ fonksiyonları için

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^p dx \geq \left|\frac{n-p}{p}\right|^p \int_{\Omega} \frac{|\phi(x)|^p}{|x|^p} dx \quad (7.2)$$

ilişkisi geçerlidir. Azorero ve Alonso (1998), $1 < p < n$ durumu için $\left|\frac{n-p}{p}\right|^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^p dx}{\int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{|x|^p} dx} = \left|\frac{n-p}{p}\right|^p$$

eşitliğini ispatlayarak ifade etmişlerdir. (7.2) eşitsizliğinde $p \geq n$ durumundaki geçerlilik, $p = n$ için $p - n = 0$ olması ve sıfırdan daha iyi bir pozitif sayının bulunamamasından kaynaklanmaktadır.

$n = 2$ olması durumunda (7.1) Hardy eşitsizliği geçerliliğini yitirmektedir. Bu durumda Hardy eşitsizliğinin yerini, Leray (1933)'ün ispatladığı her $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ fonksiyonu için geçerli olan, iki boyutlu birim yuvarın hem merkezinde hem de sınırında singüleriteye

sahip

$$\int_{B_1} |\nabla \phi|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{B_1} \frac{|\phi|^2}{|x|^2 (\ln(\frac{1}{|x|}))^2} dx, \quad (7.3)$$

eşitsizliği alır. Ayrıca, Adimurthi ve Sandeep (2002), (7.3) eşitsizliğinin çok boyutlu formunu elde etmiş ve $\frac{1}{4}$ sabitinin en iyi sabit olduğunu,

$$\inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(B_1 \setminus \{0\})} \frac{\int_{B_1} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{B_1} \frac{|\phi|^2}{|x|^2 (\ln(\frac{1}{|x|}))^2} dx} = \frac{1}{4}$$

eşitliği ile göstermiştir. Gerçekten de, Leray (1933)'ın sonucu, birden fazla singüleriteye sahip Hardy eşitsizlikleri için güzel bir örnek teşkil etmekte ve bu tipte eşitsizlikler çalışmak için iyi bir motivasyon sağlamaktadır.

$\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında Hardy ve Leray eşitsizlikleri ile ilgili, literatürde çok fazla çalışma bulunmaktadır. Özellikle (7.2) ve (7.3) eşitsizliklerinin geliştirilmiş (eşitsizliklerin sağ tarafına pozitif terimler eklenmesiyle oluşan) versiyonları ve keskin formları, tekil potansiyellere sahip problemlerin çözümlerinin incelenmesinde kullanılmasından dolayı oldukça ilgi çekmiştir. Referans olarak (Peral ve Vázquez, 1995; Brezis ve Vázquez, 1997; Azorero ve Alonso, 1998; Crespo ve Alonso, 2000; Vazquez ve Zuazua, 2000; Adimurthi ve Chaudhuri, 2002; Dupaigne, 2002) kaynaklarına bakılabilir. Bu alanda yapılan kapsamlı incelemeler için (Ghoussoub ve Moradifam, 2013; Balinsky vd., 2015) kaynaklarına da başvurulabilir.

Diğer taraftan, Riemann manifoldunda Hardy eşitsizliği çalışmalarına örnek olarak Carron (1997), ρ ağırlık fonksiyonu üzerine bazı geometrik şartlar koyarak, $\alpha \in \mathbb{R}$, $C + \alpha - 1 > 0$ ve $\phi \in C_0^\infty(M - \rho^{-1}\{0\})$ olmak üzere,

$$\int_M \rho^\alpha |\nabla \phi|^2 dx \geq \left(\frac{C + \alpha - 1}{2} \right)^2 \int_M \rho^\alpha \frac{\phi^2}{\rho^2} dx, \quad (7.4)$$

ağırlıklı Hardy eşitsizliğini elde etmiştir. Burada ρ ağırlık fonksiyonu, $|\nabla \rho| = 1$ ve $\Delta \rho \geq \frac{C}{\rho}$ şartlarını sağlamaktadır.

Carron (1997)'un çalışmasından sonra, Riemann manifoldunda Hardy tipi eşitsizlikler üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmış ve yapılmaya da devam edilmektedir, bkz. (Xia, 2007; Kombe ve Yener, 2016).

Bir M Riemann manifoldunun, Δ_g operatörü için (minimal) pozitif bir G Green fonksiyonuna sahip olduğunda, parabolik olmayan (nonparabolic) bir manifold olduğunu daha önce ifade etmiştik. Li ve Wang (2006), ağırlıklı Hardy tipi eşitsizliklerinin varlığının manifoldun parabolik olmamasıyla ilişkili olduğunu ifade etmiş ve $\phi \in C_0^\infty(M)$ için,

$$\int_M |\nabla_g \phi|^2 dv \geq \frac{1}{4} \int_M \frac{|\nabla_g G(p, x)|^2}{G^2(p, x)} \phi^2 dv,$$

L^2 Hardy eşitsizliğini elde etmiştir. Burada $G(p, x)$, $p \in M$ kutup noktasına sahip M manifoldunun minimal pozitif Green fonksiyonudur.

Kombe ve Özaydin (2009), ρ ağırlık fonksiyonu üzerine, Carron (1997) un koymuş olduğu aynı geometrik varsayımlar altında, (7.4) eşitsizliğini $p \neq 2$ durumuna genişletmiştir. Kombe ve Özaydin (2013), ρ ve δ iki ağırlık fonksiyonu içeren aşağıdaki geliştirilmiş Hardy eşitsizliğini ispatlamışlardır:

$$\int_M |\nabla_g \phi|^2 dv \geq \left(\frac{C-1}{2} \right)^2 \int_M \frac{\phi^2}{\rho^2} dv + \frac{1}{4} \int_M \frac{|\nabla_g \delta|^2}{\delta^2} \phi^2 dv. \quad (7.5)$$

Burada, $\phi \in C_0^\infty(M)$, $C > 1$ ve $-\operatorname{div}_g(\rho^{1-C} \nabla_g \delta) \geq 0$ dir. Ω , M üzerinde düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge ve $\sup_\Omega(\rho) < 1$ olmak üzere, (7.5) eşitsizliğinde $\delta = \log(\frac{1}{\rho})$ seçimi ile

$$\int_\Omega |\nabla_g \phi|^2 dv \geq \frac{1}{4} \int_\Omega \frac{|\phi|^2}{\rho^2 (\ln(\frac{1}{\rho}))^2} dv,$$

sonucu elde edilmektedir. Bu sonuç, Leray'ın (7.3) denklemi ile verilen sonucu ile örtüşmektedir.

Bir diğer önemli çalışmada, D'Ambrosio ve Dipierro (2014), $p > 1$ olmak üzere, $\phi \in C_0^\infty(M)$ için,

$$\int_M |\nabla_g \phi|^p dv \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_M \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv, \quad (7.6)$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Burada ρ ağırlık fonksiyonu $-\Delta_{p,g} \rho \geq 0$ şartını sağlamaktadır.

Tüm bu verilen çalışmaların ışığında, $\Omega \subset M$ bölgesinde, H_p ve L_p sabit olmak üzere,

$$\int_\Omega |\nabla_g \phi|^p dv_g \geq H_p \int_\Omega \frac{|\nabla_g \phi|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g + L_p \int_\Omega \frac{|\phi(x)|^p}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p} dv_g$$

şeklinde bir eşitsizlikle (7.1) Hardy ve (7.3) Leray eşitsizliklerini birleştiren daha genel bir eşitsizlik bulma fikri ortaya çıkmaktadır. Bu fikri gerçekleştirmek üzere yapmış olduğumuz çalışmanın sonucunda görülmektedir ki, yalnızca Hardy ve Leray eşitsizlikleri birleştirilmemiş, aynı zamanda, $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayda açık (explicit) sabitler içeren başka eşitsizlikler de elde edilmiştir.

Bu bölümde elde edilen ilk sonuç aşağıda verilen kalan terimli L^p -Leray eşitsizliğidir. Bu eşitsizliğin ispatında, ρ ağırlık fonksiyonu üzerinde yalnızca *negatif olmama* koşulu vardır.

Teorem 7.1. Ω bölgesi, M Riemann manifoldu üzerinde, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge ve $1 < p < \infty$ olsun. ρ , Ω bölgesi üzerinde $\sup_{\Omega}(\rho) < 1$ şartını sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \int_{\Omega} \frac{\Delta_{p,g} \rho}{(\rho \log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - \frac{(p-1)^p}{p^{p-1}} \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.7)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Kanıt. u fonksiyonu,

$$u = -\log\left(\log \frac{1}{\rho}\right)$$

olarak tanımlansın. Bu eşitliğin her iki tarafının laplasyanı alındığında $\rho \neq 0, 1$ olmak üzere,

$$\Delta_{p,g} u = \frac{\Delta_{p,g} \rho}{(\rho \log \frac{1}{\rho})^{p-1}} - \frac{(p-1)|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} + \frac{(p-1)|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} \quad (7.8)$$

eşitliği elde edilir. (7.8) eşitliğinin her iki tarafı $|\phi|^p$ ile çarpılıp Ω bölgesi üzerinde integre edildiğinde,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_{p,g} u |\phi|^p dv_g &= \int_{\Omega} \frac{\Delta_{p,g} \rho}{(\rho \log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - (p-1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + (p-1) \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.9)$$

olur. (7.9) eşitliğinin sol tarafındaki ifadeye Diverjans teoremi uygulandığında,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \Delta_{p,g} u |\phi|^p dv_g &= - \int_{\Omega} |\phi|^{p-1} \langle \nabla_g \phi, \nabla_g u \rangle |\nabla_g u|^{p-2} dv_g \\ &\leq \int_{\Omega} |\phi|^{p-1} |\nabla_g \phi| |\nabla_g u|^{p-1} dv_g \end{aligned} \quad (7.10)$$

bulunur. (7.10) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ifadeye $\epsilon > 0$, ve $a, b \geq 0$ olacak şekilde,

$$ab \leq \epsilon a^p + (p\epsilon)^{-1/(p-1)} \frac{(p-1)}{p} b^{\frac{p}{p-1}}$$

olarak bilinen ϵ 'lu Young eşitsizliği uygulanırsa, $c(\epsilon) = \left(\frac{p-1}{p}\right) (p\epsilon)^{\frac{1}{1-p}}$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |\phi|^{p-1} |\nabla_g \phi| |\nabla_g u|^{p-1} dv_g \leq \epsilon \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g + c(\epsilon) \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv_g \quad (7.11)$$

elde edilir. (7.11) eşitsizliği (7.9) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{p-1}{p\epsilon}\right) \left(1 - (p\epsilon)^{\frac{1}{1-p}}\right) \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \frac{1}{p\epsilon} \int_{\Omega} \frac{\Delta_{p,g} \rho}{(\rho \log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - \frac{p-1}{p\epsilon} \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.12)$$

olur. Burada $\epsilon \rightarrow \frac{p-1}{p\epsilon} \left(1 - (p\epsilon)^{\frac{1}{1-p}}\right)$ fonksiyonu maksimum değerini $\epsilon = \frac{p^{p-2}}{(p-1)^{p-1}}$ noktasında alır ve maksimum değeri $(\frac{p-1}{p})^p$ dir. Bu değer (7.12)'da yerine yazıldığında istenilen (7.7) ifadesi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \int_{\Omega} \frac{\Delta_{p,g} \rho}{(\rho \log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - \frac{(p-1)^p}{p^{p-1}} \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} |\phi|^p dv_g. \end{aligned}$$

Şimdi, Hardy ve Leray eşitsizliklerinin tek bir eşitsizlikte birleştirilmesi sorusuna dönelim. Bu tip eşitsizlikler daha önceden başka varsayımlar altında Kombe ve Yener (2016) tarafından çalışılmıştır. Şimdi ρ ve δ üzerinde yeni varsayımlar kurularak bu doğrultuda elde edilen ilk sonuç aşağıda verilmektedir.

Teorem 7.2. M , tam, kompakt olmayan bir Riemann manifoldu, $p \geq 2$ ve $n > 1$ olsun. ρ ve δ , M üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere, $C > 0$ iken,

$$\Delta_{p,g}\rho \geq C \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho} \quad \text{ve} \quad -\operatorname{div}_g(\rho^{p-C-1} \frac{|\nabla_g \delta|^{p-2}}{\delta^{p-2}} \nabla_g \delta) \geq 0$$

şartları sağlansın. O halde,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{C+1-p}{p} \right)^p \int_M \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \frac{1}{p^p} \int_M \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.13)$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}\{0\})$ için geçerlidir.

Kanıt. $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}\{0\})$ olsun. $\beta < 0$ olmak üzere, $\phi = \rho^\beta \psi$ tanımlansın. O halde,

$$|\nabla_g(\rho^\beta \psi)|^p = |\beta \rho^{\beta-1} \nabla_g \rho \psi + \rho^\beta \nabla_g \psi|^p$$

yazılabilir. Burada (3.3) denkleminde verilen eşitsizlik kullanıldığında,

$$\begin{aligned} |\nabla_g \phi|^p &\geq |\beta|^p \rho^{p\beta-p} |\nabla_g \rho|^p |\psi|^p + \beta |\beta|^{p-2} \rho^{p\beta-p+1} \langle \nabla_g(|\psi|^p), \nabla_g \rho \rangle |\nabla_g \rho|^{p-2} \\ &\quad + c(p) \rho^{p\beta} |\nabla_g \psi|^p \end{aligned} \quad (7.14)$$

olduğu görülür. (7.14) ifadesi M üzerinde integre edilip, eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime Diverjans teoremi uygulandığında,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq |\beta|^p \int_M \rho^{p\beta-p} |\nabla_g \rho|^p |\psi|^p dv_g \\ &\quad - \beta |\beta|^{p-2} \int_M \operatorname{div}_g(\rho^{p\beta-p+1} |\nabla_g \rho|^{p-2} \nabla_g \rho) |\psi|^p dv_g \\ &\quad + c(p) \int_M \rho^{p\beta} |\nabla_g \psi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.15)$$

halini alır. Şimdi,

$$\Delta_{p,g}\rho \geq \frac{C|\nabla_g \rho|^p}{\rho}$$

varsayımı kullanılarak, (7.15) eşitsizliğinin sağında bulunan diverjans hesaplandığında,

$$\operatorname{div}_g(\rho^{p\beta-p+1} |\nabla_g \rho|^{p-2} \nabla_g \rho) \geq (\beta p - p + 1 + C) \rho^{\beta p-p} |\nabla_g \rho|^p$$

eşitsizliği bulunur. O halde, $\beta < 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} & -\beta|\beta|^{p-2} \int_M \operatorname{div}_g(\rho^{\beta p-p+1} \nabla_g \rho |\nabla_g \rho|^{p-2}) |\psi|^p dv_g \\ & \geq -\beta|\beta|^{p-2} (\beta p - p + 1 + C) \int_M \rho^{\beta p-p} |\nabla_g \rho|^p |\psi|^p dv_g \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifade (7.15) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$f(\beta) = -\beta|\beta|^{p-2} (\beta p - p + 1 + C) + |\beta|^p$$

olmak üzere,

$$\int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g \geq f(\beta) \int_M \rho^{\beta p-p} |\nabla_g \rho|^p |\psi|^p dv_g + c(p) \int_M \rho^{\beta p} |\nabla_g \psi|^p dv_g \quad (7.16)$$

bulunur. $f(\beta)$ fonksiyonu maksimum değerini $\beta_0 = \frac{p-C-1}{p}$ noktasında alır ve bu değer $f(\beta_0) = (\frac{C+1-p}{p})^p$ dir. O halde (7.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g & \geq \left(\frac{C+1-p}{p} \right)^p \int_M \rho^{-C-1} |\nabla_g \rho|^p |\psi|^p dv_g \\ & + c(p) \int_M \rho^{p-C-1} |\nabla_g \psi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.17)$$

halini alır. Şimdi (7.17) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci terime odaklanalım.

$0 \leq \delta(x) \in C^\infty(M \setminus \rho^{-1}\{0\})$ olacak şekilde $\varphi(x) := \delta(x)^{-1/p} \psi(x)$ fonksiyonunu tanımlansın. (3.3) eşitsizliği kullanılarak,

$$|\nabla_g \psi|^p \geq \frac{|\varphi|^p}{p^p} \delta^{1-p} |\nabla_g \delta|^p + p^{1-p} |\nabla_g \delta|^{p-2} \delta^{2-p} \langle \nabla_g \delta, \nabla_g (|\varphi|^p) \rangle$$

yazılabilir. Böylece, (7.17) ifadesinin sağındaki ikinci terim için

$$\begin{aligned} \int_M \rho^{p-C-1} |\nabla_g \psi|^p dv_g & \geq \frac{1}{p^p} \int_M \rho^{p-C-1} |\nabla_g \delta|^p \delta^{1-p} |\varphi|^p dv_g \\ & + p^{1-p} \int_M \rho^{p-C-1} \frac{|\nabla_g \delta|^{p-2}}{\delta^{p-2}} \langle \nabla_g \delta, \nabla_g (|\varphi|^p) \rangle dv_g \end{aligned} \quad (7.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, ilk olarak (7.18) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ikinci integrale kısmi integrasyon uygulandıktan sonra $-\operatorname{div}_g(\rho^{p-C-1} \frac{|\nabla_g \delta|^{p-2}}{\delta^{p-2}} \nabla_g \delta) \geq 0$ diferansiyel eşitsizliği uygulanıp $\varphi = \rho^{\frac{-p+C+1}{p}} \phi \delta^{-1/p}$ geri dönüşümü yapıldığında,

$$\int_M \rho^{p-C-1} |\nabla_g \psi|^p dv_g \geq \frac{1}{p^p} \int_M \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g \quad (7.19)$$

eşitsizliğine ulaşılır. (7.19) sonucu (7.17) ifadesinde yerine yazılıp istenilen eşitsizlik elde edilir:

$$\int_M |\nabla_g \phi|^p dv_g \geq \left(\frac{C+1-p}{p} \right)^p \int_M \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g + \frac{c(p)}{p^p} \int_M \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g.$$

Teorem 7.2 ile elde edilen geliştirilmiş Hardy tipi eşitsizlik $1 < p < 2$ durumu için farklı bir kalan terimle geçerlidir. Bu sonuca ispatta (3.3) yerine (3.2) vektör eşitsizliği kullanılarak ulaşılabilir.

Teorem 7.2 de $\delta := \ln \frac{1}{\rho}$ seçimi yapıldığında,

$$-\operatorname{div}_g(\rho^{p-C-1} \frac{|\nabla_g \delta|^{p-2}}{\delta^{p-2}} \nabla_g \delta) \geq 0$$

diferansiyel eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Böylece bu seçim, hem Hardy hem de Leray eşitsizliklerini içeren genel bir Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki sonucu vermektedir.

Sonuç 7.1. Ω bölgesi, M Riemann manifoldunda, $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $p \geq 2$, $C > 0$ ve $\sup_{\Omega} \rho < 1$ olsun. ρ fonksiyonu

$$\Delta_{p,g} \rho \geq \frac{C |\nabla_g \rho|^p}{\rho}$$

şartını sağlasın. O halde,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{C+1-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \frac{1}{p^p} \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p \left(\ln \frac{1}{\rho} \right)^p} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.20)$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}\{0\})$ için geçerlidir.

Şimdi vereceğimiz aşağıdaki teoremde, ρ ve δ ağırlık fonksiyonları üzerindeki varsayımlar değiştirilmiştir. Elde edilen eşitsizlik Teorem (7.2) de verilen eşitsizliğe benzer görünse de ρ ve δ ağırlık fonksiyonları üzerindeki varsayımlar farklıdır. Ayrıca bu varsayımları sağlayan fonksiyonlar kullanılarak elde edilen eşitsizlikler farklı sabit içermektedir.

Teorem 7.3. M , tam, kompakt olmayan Riemann manifoldu, $p \geq 2$ ve $n > 1$ olsun. ρ ve δ , M üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$-\Delta_{p,g}\rho \geq 0 \quad \text{ve} \quad -\operatorname{div}_g(\rho^{p-1}|\nabla_g\delta|^{p-2}\nabla_g\delta) \geq 0$$

şartları sağlansın. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g\phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_M \frac{|\nabla_g\rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \int_M \frac{\Delta_{p,g}\rho}{\rho^{p-1}} |\phi|^p dv_g \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{p-1}-1}\right) \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_M \frac{|\nabla_g\delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g \end{aligned} \quad (7.21)$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(M \setminus \rho^{-1}\{0\})$ için geçerlidir.

Kanıt. $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ olmak üzere, $\psi = \rho^{\frac{1-p}{p}}\phi$, seçilsin. Standart türev alma işlemiyle

$$|\nabla_g\phi|^p = \left(\frac{p-1}{p}\right)\rho^{-1/p}\psi\nabla_g\rho + \rho^{(p-1)/p}\nabla_g\psi|^p$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. (3.3) denklemi ile verilen vektör eşitsizliği kullanılarak elde edilen

$$\begin{aligned} |\nabla_g\phi|^p &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \frac{|\nabla_g\rho|^p}{\rho} \psi^p + \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} |\nabla_g\rho|^{p-2} \langle \nabla_g\rho, \nabla_g(\psi^p) \rangle \\ &\quad + c(p) |\nabla_g\psi|^p |\rho|^{p-1} \end{aligned}$$

eşitsizliğine M üzerinde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g\phi|^p dv_g &\geq \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_M \frac{|\nabla_g\rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g \\ &\quad - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1} \int_M \rho^{1-p} \Delta_{p,g}\rho |\phi|^p dv_g \\ &\quad + c(p) \int_M |\nabla_g\psi|^p |\rho|^{p-1} dv_g \end{aligned} \quad (7.22)$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi, (7.22) eşitsizliğindeki

$$I_1 := c(p) \int_M |\nabla_g\psi|^p |\rho|^{p-1} dv_g$$

teriminde yeni bir $0 < \varphi(x) := c(p)^{\frac{1}{p}} \delta(x)^{\frac{1-p}{p}} \psi(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Standart türev işlemi ile

$$\nabla_g\psi = \left(\frac{1}{c(p)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\frac{p-1}{p}\right)\varphi\delta^{-1/p}\nabla_g\delta + \delta^{\frac{p-1}{p}}\nabla_g\varphi\right)$$

olduğu açıktır. Burada (3.3) vektör eşitsizliği kullanılırsa,

$$|\nabla_g \psi|^p \geq \frac{1}{c(p)} \left(\left(\frac{p-1}{p} \right)^p \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta} |\varphi|^p + \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} |\nabla_g \delta|^{p-2} \langle \nabla_g(\varphi^p), \nabla_g \delta \rangle \right) + c(p) |\nabla_g \varphi|^p |\delta|^{p-1}$$

elde edilir. Böylece,

$$I_1 \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_M \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta} |\rho|^{p-1} v |\varphi|^p dv_g - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \int_M \operatorname{div}_g(\rho^{p-1} |\nabla_g \delta|^{p-2} \nabla_g \delta) |\varphi|^p dv_g$$

olur. Burada $-\operatorname{div}_g(\rho^{p-1} |\nabla_g \delta|^{p-2} \nabla_g \delta) \geq 0$ olduğundan ikinci terim pozitifdir ve hariç tutulabilir. Sonrasında $\psi = \rho^{\frac{1-p}{p}} \phi$ geri dönüşümü uygulandığında, $c_p = \frac{1}{2^{p-1}-1}$ olmak üzere, bkz. (Lindqvist, 1990),

$$I_1 \geq \frac{1}{c(p)} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g \quad (7.23)$$

bulunur. (7.23) eşitsizliği (7.22) denkleminde yerine yazıldığında istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur:

$$\int_{\Omega} |\nabla_g \phi|^p dv_g \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \rho|^p}{\rho^p} |\phi|^p dv_g - \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \int_{\Omega} \frac{\Delta_{p,g} \rho}{\rho^{p-1}} |\phi|^p dv_g + \frac{1}{(2^{p-1}-1)} \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\nabla_g \delta|^p}{\delta^p} |\phi|^p dv_g.$$

7.1. Teorem 7.1, Teorem 7.2 ve Teorem 7.3'ün Uygulamaları

Bu alt bölümde, Teorem 7.1, Teorem 7.2 ve Teorem 7.3 te yer alan şartları sağlayan uygun ρ ve δ ağırlık fonksiyonları seçilerek, $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayın çeşitli bölgelerinde elde edilen, kalan terimli Hardy, Leray ve Poincaré tipi eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 7.1 de $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayın uzaklık fonksiyonu olan $\rho := d_{\mathbb{H}^n}(0, x) = \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$ seçildiğinde aşağıda verilen Leray tipi kalan terimli eşitsizlik elde edilmektedir.

Sonuç 7.2. B_1 , hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ 'de birim hiperbolik yuvar, $n \geq 2$ ve $1 < p \leq n$ olsun. O halde her $\phi \in C_0^\infty(B_1)$ fonksiyonu için,

$$\int_{B_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv \geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{B_1} \frac{|\phi|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} dv + (n-p) \left(\frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \int_{B_1} \frac{|\phi|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^{p-1}} dv \quad (7.24)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikteki $(\frac{p-1}{p})^p$ sabiti en iyi sabittir.

Kanıt. $(\frac{p-1}{p})^p$ sabitinin en iyi sabit olduğunu göstermek için, a bir sabit olmak üzere,

$$\phi(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \left(\ln \frac{1}{a}\right)^{\frac{p-1}{p}(1+\epsilon)} & , \quad 0 \leq \rho \leq a \\ \left(\ln \frac{1}{\rho}\right)^{\frac{p-1}{p}(1+\epsilon)} & , \quad a \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu kullanılmıştır. Burada $\phi(\rho)$, $\mathbf{B}_1 \subset \mathbb{H}^n$ de kompakt desteğe sahip bir fonksiyondur. Gerekli türev alma ve integrasyon işlemleri yapıldığında $(\frac{p-1}{p})^p$ sabitinin en iyi sabit olduğu

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbf{B}_1} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv}{\int_{\mathbf{B}_1} \frac{|\phi|^p}{\rho^p (\log \frac{1}{\rho})^p} dv} = \left(\frac{p-1}{p} \right)^p$$

eşitliği ile elde edilmektedir.

Şimdi ise Teorem 7.2 de verilen şartları sağlayan uygun ρ ve δ fonksiyonları seçilerek elde edilen Hardy-Poincaré ve Hardy-Leray tipi eşitsizlikleri vereceğiz.

İlk olarak,

$$\rho := \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \quad \text{ve} \quad \delta := e^{(2^{p-1}-1)\frac{1}{p}(1-n)\rho}$$

fonksiyonları ele alınsın. Bu fonksiyonlar Teorem 7.2 deki şartları sağlamaktadır.

Böylece aşağıda verilen, Hardy-Poincaré tipi eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 7.3. $\mathbf{B}_R$, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ de 0 merkezli, $R = \frac{p-1}{n-1}(\frac{1}{2^{p-1}-1})^{\frac{1}{p}}$ yarıçaplı hiperbolik yuvar ve $2 \leq p \leq n$ olsun. O halde,

$$\int_{\mathbf{B}_R} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv \geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\mathbf{B}_R} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dv + \left(\frac{n-1}{p} \right)^p \int_{\mathbf{B}_R} |\phi|^p dv \quad (7.25)$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{B}_R)$ için geçerlidir.

Uyarı 7.1. Hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ 'de Poincaré eşitsizliğinin $p = 2$ durumu McKean (1970) tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Strichartz (1983), McKean (1970) in sonucunu, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n)$ fonksiyonları için,

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv \geq \left(\frac{n-1}{p} \right)^p \int_{\mathbb{H}^n} |\phi|^p dv$$

şeklinde genelleştirmiştir. Burada $(\frac{n-1}{p})^p$ sabiti en iyi sabittir, bkz. Berchio vd. (2017); Ngô ve Nguyen (2019). $(\frac{n-p}{p})$ sabitinin de L^p Hardy eşitsizliğindeki en iyi sabit olduğunu bu bölümün başında ifade etmiştik, bkz. (Azorero ve Alonso, 1998).

O halde (7.25) denkleminde elde edilen kalan terimli eşitsizlikteki hem Hardy sabiti hem de Poincaré terimindeki sabit en iyi sabittir.

Şimdi ise,

$$\rho := \log\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \quad \text{ve} \quad \delta := \left(\ln \frac{1}{\rho}\right)^{p-1}$$

seçimi için gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıda verilen Hardy-Leray tipi eşitsizlik bulunur.

Sonuç 7.4. Ω bölgesi, $\mathbb{H}^n$ 'de $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $2 \leq p \leq n$ ve $\sup_{\Omega} d < 1$ olsun. Bu takdirde, her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &\geq \left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{\rho^p} dv \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{p-1}-1}\right) \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{\rho^p (\ln \frac{1}{\rho})^p} dv \end{aligned} \quad (7.26)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Son olarak Teorem 7.3 ün uygulamalarını vereceğiz. Farklı eşitsizlikler elde etmek için çeşitli ρ ve δ fonksiyonları ele alınmıştır. Aşağıda verilen bazı eşitsizlikler benzer gibi görünse de, belirtmeliyiz ki aslında farklı sabitler içermektedir. Karışıklıktan kaçınmak adına ilk olarak keskin sabit içeren terimi ve bu terimle ilişkili olan ismi yazacağız.

Aşağıda verilen sonuçlarda, $d(x) = \log(\frac{1+|x|}{1-|x|})$, orijin ile $x \in \mathbb{B}^n$ noktası arasındaki hiperbolik uzaklığı belirtmektedir.

İlk olarak,

$$\rho := d^{\frac{p-n}{p-1}} \quad \text{ve} \quad \delta := \ln \frac{1}{d}$$

fonksiyon ikilisini ele alalım. Aşağıda verilen Hardy-Leray tipi eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 7.5. Ω bölgesi, $\mathbb{H}^n$ 'de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $2 \leq p \leq n$ ve $\sup_{\Omega} d < 1$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &\geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{d^p} dv \\ &+ \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{d^p (\ln \frac{1}{d})^p} dv. \end{aligned} \quad (7.27)$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için geçerlidir.

Teorem 7.3 ün bir diğer sonucuna,

$$\rho := d^{\frac{p-n}{p-1}} \quad \text{ve} \quad \delta := e^{-d}$$

fonksiyonları için gerekli hesaplamalar yapıldığında ulaşılır. Bu seçimle aşağıda verilen Hardy-Poincaré tipi eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 7.6. Ω bölgesi, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $2 \leq p \leq n$ ve $\sup_{\Omega} d < 1$ olsun. O halde her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &\geq \left(\frac{n-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{d^p} dv \\ &+ \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} |\phi|^p dv \end{aligned} \quad (7.28)$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde,

$$\rho := \ln \frac{1}{d} \quad \text{ve} \quad \delta := e^{-d}$$

fonksiyon çifti ele alındığında, aşağıda verilen Leray-Poincaré tipi eşitsizliğe ulaşılır.

Sonuç 7.7. Ω bölgesi, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $2 \leq p \leq n$ ve $\sup_{\Omega} d < e^{\frac{1-p}{n-p}}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &\geq \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{d^p (\ln \frac{1}{d})^p} dv \\ &+ \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} |\phi|^p dv. \end{aligned} \quad (7.29)$$

eşitsizliği $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için sağlanır.

Son olarak,

$$\rho := e^{\frac{(1-n)d}{p-1}} \quad \text{ve} \quad \delta := \ln \frac{1}{d}$$

fonksiyonları için Teorem 7.3 uygulanırsa, aşağıda verilen Poincaré-Leray tipi eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 7.8. Ω bölgesi, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ 'de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölge, $2 \leq p \leq n$ ve $\sup_{\Omega} d < \frac{n-p}{n-1}$ olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}^n} \phi|^p dv &\geq \left(\frac{n-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} |\phi|^p dv \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{p-1}-1} \right) \left(\frac{p-1}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|\phi|^p}{d^p (\ln \frac{1}{d})^p} dv \end{aligned} \tag{7.30}$$

eşitsizliği her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ için sağlanır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, doğrusal olmayan hızlı difüzyon tipi ($0 < m < 1$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g(u^m) + V(x)u^m + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T). \end{cases}$$

denklemleri ile, doğrusal olmayan p -Laplasyan tipi ($1 < p < 2$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{p,g}u + V(x)u^{p-1} + \lambda u^q & , \quad \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & , \quad \Omega, \\ u(x, t) = 0 & , \quad \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

denklemlerinin kompakt olmayan bir M Riemann manifoldu üzerinde pozitif çözümlerinin yokluğu incelenmiştir. Bu problemlerde $V(x)$ potansiyeline ve λu^q kaynak terimine sahip doğrusal olmayan problemlerin pozitif çözümlerinin yokluğunun hangi kriterlere bağlı olduğu tespit edilmiştir. Ele alınan problemler, literatürde daha önce hiç çalışılmamış olması ve genel bir Riemann manifoldunda incelenmiş olması dolayısıyla önem arz etmektedir.

Yapılan incelemede denklemlerde yer alan q kritik kuvvetin aralığı belirlenerek spektrumun dibi yardımıyla pozitif çözümlerin yokluğu ispatlanmıştır. Kritik kuvvetin aralığının Fujita (1966)'nın belirlemiş olduğu aralıkla örtüştüğü görülmüştür. Pozitif çözümlerin yokluğunda, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ 'de çeşitli $V(x)$ potansiyelleri seçilmiş ve bu potansiyeller kullanarak çözümün yokluğunu ifade eden teoremlerin uygulamaları verilmiştir.

Kuantum mekaniği teorisinde, bir parçacığın toplam enerjisi ϕ dalga fonksiyonu olmak üzere: $E_\phi := T_\phi + V_\phi$ ile ifade edilmektedir. Burada,

$$T_\phi := \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx$$

parçacığın kinetik enerjisi ve

$$V_\phi := \int_{\Omega} |\phi|^2 dx$$

ise parçacığın beklenen potansiyel enerjisidir. Eğer potansiyel enerji alttan sınırlı değilse, parçacığın kinetik enerjisi artabilir ve potansiyel enerji o kadar hızlı düşebilir ki parçacık potansiyelin sonsuz olduğu bir noktaya ulaşır. Bu da pozitif çözümün yokluğuna sebep olur. Eğer potansiyel enerji alttan sınırlı olursa, kinetik enerji de sınırlı olur ve böyle bir problem ortaya çıkmaz (bkz Faris ve Lavine (1974); Portmann (2014)).

Dikkat edilmelidir ki, pozitif çözümün yokluğu ispat edilirken hesaplanan spektrumda;

$$\sigma_{\inf}((1 - \epsilon)V, \Omega) = \inf_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \int_{\Omega} (1 - \epsilon)V |\phi|^2 dx}{\int_{\Omega} |\phi|^2 dx}$$

$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx$ kinetik enerji ile $\int_{\Omega} V |\phi|^2 dx$ potansiyel enerji arasında bir yarış vardır. Bu yarışın sonucunda spektrum $-\infty$ olabilmektedir. Bu da pozitif çözümün olmadığına kanıttır. Sonucu etkileyen en önemli faktör ise V potansiyelinin seçimidir. Bu ise, spektrumunu $-\infty$ a götürecek farklı potansiyeller (singüler potansiyeller) bulma fikrine yol açmaktadır.

Hardy tipi integral eşitsizliklerinin kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin incelenmesinde önemli bir yere sahip olduğu bilinmektedir. Bu tez çalışmasında elde edilen diğer önemli sonuçlar ise Hardy tipi eşitsizlikler bulmaya yöneliktir. M Riemann manifoldu üzerinde, geliştirilmiş iki ağırlıklı L^p Hardy tipi eşitsizlikler üzerine bazı sonuçlar belli varsayımlar altında ispatlanmıştır. Bu varsayımları sağlayan uygun ağırlık fonksiyonlarının seçimi ile, hiperbolik uzay $\mathbb{H}^n$ in farklı bölgelerinde çeşitli kalan terimli Hardy ve Leray tipi eşitsizlikler türetilmiştir. Elde edilen L^p Leray eşitsizliği, ele almış olduğumuz problemlerin uygulamasında kullanmak üzere, spektrumunu $-\infty$ a götüren, iki noktada singüleriteye sahip yeni bir potansiyel sağlamıştır.

M Riemann manifoldu üzerinde elde edilen bu teoremlerde seçilen ağırlık fonksiyonları radyal olarak seçilmiştir. Ancak radyal olmayan ağırlık fonksiyonlarının seçimi ile de teoremlerin çeşitli kalan terimli Hardy tipi eşitsizlikler verebileceği öngörülmektedir. Bu anlamda elde edilen teoremler, uygun seçimler yapıldığında literatürde var olan sonuçları kapsamaya ve yeni sonuçlar elde etmeye yarayan etkili bir metottur.

KAYNAKÇA

- Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press, 320p, New York.
- Adimurthi, Sandeep, K., 2002. Existence and non-existence of the first eigenvalue of the perturbed hardy–sobolev operator. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics. 132(5), 1021–1043.
- Adimurthi, M. R., Chaudhuri, N., 2002. An improved hardy-sobolev inequality and its application. Proceedings of the American Mathematical Society. 130(2), 489–505.
- Anderson, J. W., 2005. Sobolev Spaces. Springer-Verlag, 276p, London.
- Azorero, J. G., Alonso, I. P., 1998. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. Journal of Differential Equations. 144(2), 441–476.
- Balinsky, A. A., Evans, W. D., Lewis, R. T., 2015. The Analysis and Geometry of Hardy’s Inequality. Springer International Publishing, 263p, Switzerland.
- Baras, P., Goldstein, J. A., 1984. The heat equation with a singular potential. Transactions of the American Mathematical Society. 284(1), 121–139.
- Benedetti, R., Petronio, C., 1992. Lectures on Hyperbolic Geometry. Springer-Verlag, 330p, Berlin Heidelberg.
- Berchio, E., D’Ambrosio, L., Ganguly, D., Grillo, G., 2017. Improved l^p -poincaré inequalities on the hyperbolic space. Nonlinear Analysis. 157, 146–166.
- Brezis, H., 2011. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, 600p, New York, NY.
- Brezis, H., Vázquez, J. L., 1997. Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. 10(2), 443–469.
- Cabré, X., Martel, Y., 1999. Existence versus explosion instantanée pour des équations de la chaleur linéaires avec potentiel singulier. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 329(11), 973–978.
- Carron, G., 1997. Inégalités de hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes. Journal de mathématiques pures et appliquées. 76(10), 883–891.
- Chavel, I., 2006. Riemannian Geometry-A Modern Introduction. Cambridge University Press, 488p, New York.
- Crespo, J. A., Alonso, I. P., 2000. Global behavior of the cauchy problem for some critical nonlinear parabolic equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 31(6), 1270–1294.
- D’Ambrosio, L., Dipierro, S., 2014. Hardy inequalities on riemannian manifolds and applications. Annales de l’Institut Henri Poincare Non Linear Analysis. 31(3), 449–475.

- Deng, K., Levine, H. A., 2000. The role of critical exponents in blow-up theorems: the sequel. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 243(1), 85–126.
- Dupaigne, L., 2002. A nonlinear elliptic pde with the inverse square potential. *Journal d'analyse Mathématique*. 86(1), 359–398.
- Evans, L., 2002. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 749p, Rhode Island.
- Faris, W. G., Lavine, R. B., 1974. Commutators and self-adjointness of hamiltonian operators. *Communications in Mathematical Physics*. 35(1), 39–48.
- Fujita, H., 1966. On the blowing up of solutions for the cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*. 13, 109–124.
- Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J., 1993. *Riemannian Geometry*. Springer Verlag, 322p, Berlin Heidelberg.
- Ghoussoub, N., Moradifard, A., 2013. Functional inequalities: New perspectives and new applications. In *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 299p, Providence, Rhode Island.
- Goldstein, G. R., Goldstein, J. A., Kombe, I., 2005. Nonlinear parabolic equations with singular coefficient and critical exponent. *Applicable Analysis*. 84(6), 571–583.
- Goldstein, J. A., 1985. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, 245p, New York.
- Goldstein, J. A., Kombe, I., 2003. Nonlinear degenerate parabolic equations with singular lower-order term. *Advances in Differential Equations*. 8, 1153–1192.
- Goldstein, J. A., Zhang, Q. S., 2001. On a degenerate heat equation with a singular potential. *Journal of Functional Analysis*. 186(2), 342–359.
- Goldstein, J. A., Zhang, Q. S., 2003. Linear parabolic equations with strong singular potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*. 355(1), 197–211.
- Grigor'yan, A., 2009. *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, 482p, Boston, MA.
- Hayakawa, K., 1973. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations. *Proceedings of the Japan Academy*. 49(7), 503–505.
- Hebey, E., 2000. *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*. CIMS Lecture Notes, American Mathematical Society, 290p, Providence, Rhode Island.
- Kombe, I., 2004. The linear heat equation with highly oscillating potential. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 132(9), 2683–2691.

- Kombe, I., Özaydin, M., 2009. Improved hardy and rellich inequalities on riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*. 361(12), 6191–6203.
- Kombe, I., Özaydin, M., 2013. Hardy-poincaré, rellich and uncertainty principle inequalities on riemannian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*. 365(10), 5035–5050.
- Kombe, I., Yener, A., 2016. Weighted hardy and rellich type inequalities on riemannian manifolds. *Mathematische Nachrichten*. 289(8-9), 994–1004.
- Leray, J., 1933. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique.. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 12, 1–82.
- Levine, H. A., 1990. The role of critical exponents in blowup theorems. *Siam Review*. 32(2), 262–288.
- Li, P., Wang, J., 2006. Weighted poincaré inequality and rigidity of complete manifolds. In *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 39 (6). 921–982.
- Lindqvist, P., 1990. On the equation $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 109(1), 157–164.
- McKean, H. P., 1970. An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature. *Journal of Differential Geometry*. 4(3), 359–366.
- Ngô, Q. A., Nguyen, V. H., 2019. Sharp constant for poincaré-type inequalities in the hyperbolic space. *Acta Mathematica Vietnamica*. 44(3), 781–795.
- Ozan, Y., 2016. *Türevlenebilir Manifoldlara Giriş*. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 401, Ankara.
- Peral, I., Vázquez, J., 1995. On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term. *Archive for rational mechanics and analysis*. 129(3), 201–224.
- Portmann, F., 2014. *Spectral Inequalities and Their Applications in Quantum Mechanics*. KTH Royal Institute of Technology, Ph.D. Thesis, 29p, Stockholm, Sweden.
- Ratcliffe, J., 2006. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer-Verlag, 782p, New York.
- Sahin, B., 2012. *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*. Nobel Akademik Yayıncılık, 294, Ankara.
- Saloff-Coste, L., 2001. *Aspects of Sobolev-type Inequalities*. Cambridge University Press, 202p, Cambridge, UK.
- Strichartz, R. S., 1983. Analysis of the laplacian on the complete riemannian manifold. *Journal of functional analysis*. 52(1), 48–79.

- Vazquez, J. L., Zuazua, E., 2000. The hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential. *Journal of Functional Analysis*. 173(1), 103–153.
- Weissler, F. B., 1981. Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation. *Israel Journal of Mathematics*. 1-2(38), 29–40.
- Xia, C., 2007. The caffarelli-kohn-nirenberg inequalities on complete manifolds. *Mathematical Research Letters*. 14(5), 875–885.
- Zhang, Q. S., 1998. A new critical phenomenon for semilinear parabolic problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 219(1), 125–139.
- Zhang, Q. S., 1999. Blow up results for nonlinear parabolic equations on manifolds. *Duke Mathematical Journal*. 97(3), 515–539.
- Zhang, Q. S., 2000. Semilinear parabolic problems on manifolds and applications to the non-compact yamabe problem. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2000(46), 1–30.
- Zhang, Q. S., 2001. The quantizing effect of potentials on the critical number of reaction diffusion equations. *Journal of Differential Equations*. 170(1), 188–214.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sümeyye Bakım

Eğitim Durumu

Lise : Özel Arda Asalet Lisesi, İstanbul, 2005

Lisans : Fatih Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2009

Yüksek Lisans : Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2014

Doktora : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı, 2021

Yayınları

Bakım, S., Goldstein, G.R., Goldstein, J.A., Kömbe, I. 2020. Fast Diffusion Equations on Riemmanian Manifolds. Differential and Integral Equations, 33, 507–526.

Goldstein, G.R., Goldstein, J.A., Kömbe, I., Bakım, S. 2021. Nonexistence Results for Parabolic Equations Involving p –Laplacian and Leray-Hardy Type Inequalities on Riemannian Manifolds. Journal of Evolution Equations, In Press (Early Access).

Bakım, S., Yöre, S. 2020. Investigation of Applications of Fibonacci Sequence and Golden Ratio in Music. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 29 (3), 49–69.

Bakım, S. Yöre, S. 2019. Mathematics in Music. Interdisciplinary International Mathematics and Music Congress, İstanbul, 21-22 June, 100.